Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 6 — 1951. — No. 4

Zagreb 1951

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

SADRŽAJ

VAŽNO UPOZORENJE!

PRETPLATNICIMA GLASNIKA

Da bi se vrlo povećani materijalni izdaci za štampanje Glasnika barem djelomice pokrili, prema zaključku godišnje skupštine Društva matematičara i fizičara povećana je za godinu 1951. godišnja pretplata na Glasnik odnosno članarina Društva od 120.— na 180.— dinara. Taj se iznos može uplatiti i dvokratno, po 90.— dinara.

Molimo sve članove, odnosno pretplatnike, da uzmu u obzir da su materijalne poteškoće oko izdavanja Glasnika vrlo velike, pa da što prije pošalju članarinu odnosno pretplatu.

Oni pak članovi, odnosno pretplatnici, koji imaju zaostatke u pretplati, neka te zaostatke što prije uplate, jer će im u protivnom slučaju dostava Glasnika biti obustavljena.

Redovno dostavljanje pretplate može znatno olakšati posao administraciji Glasnika i uštediti Društvu izdatke na pismene opomene radi zaostale pretplate. Pošaljite zato još danas pretplatu čekovnom uplatnicom br. 401-9533139 na Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske, Zagreb, ili je uplatite u administraciji Glasnika, Hrv. prir. društvo, Zagreb, Ilica 16/III.

REDAKCIJA GLASNIKA
MATEMATIČKO-FIZIČKOG I ASTRONOMSKOG

Upravni odbor Društva matematičara i fizičara N. R. Hrvatske obavještava sve članove Društva, da će se u *srijedu 30. siječnja 1952.*, u Matematičkom institutu, Marulićev trg broj 19/I., u 18,30 sati, održati

REDOVNA GODIŠNJA SKUPŠTINA DRUŠTVA

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1951 | T. 6 / No. 4

POOPĆENJE DVAJU TEOREMA ELEMENTARNE PLANIMETRIJE[1] NA n-DIMENZIONALNI PROSTOR

Vladimir Devidé, Zagreb

I.

1. Prvi teorem elementarne planimetrije, koji ćemo poopćiti na slučaj n-dimenzionalne geometrije, je ovaj:

Visine, spuštene iz vrhova A, B, C trokuta (vidi sl. 1.), sijeku njima nasuprotne stranice (ili njihova produljenja) u A', B', C', a trokutu ABC opisanu kružnicu u A'', B'', C'' tako, da je

$$\Sigma\varrho' = \frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} = 4. \tag{1}$$

Stavak se jednostavno može izvesti ovako:

$$\frac{AA''}{AA'} = \frac{AA' + A'A''}{AA'} = 1 + \frac{A'A''}{AA'} = \tag{2}$$
$$= 1 + \frac{P\triangle(A''CB)}{P\triangle(ABC)} = 1 + \frac{P_A}{P},$$

jer trokuti $A''CB$ i ABC imaju istu bazu BC, a visine su im $A'A''$ odnosno AA'. Bit će dakle

$$\Sigma\varrho' = 3 + \frac{P_A + P_B + P_C}{P}. \tag{3}$$

Međutim, lako je uvidjeti da je $\triangle A''CB \cong \triangle SCB$ [$\sphericalangle A''BC = \sphericalangle A''AC$ (obodni kutovi nad istim lukom $A''C$), $\sphericalangle A''AC = \sphericalangle B''BC$ (okomični kutovi) dakle $\sphericalangle A''BC = \sphericalangle B''BC$ i t. d.]; analogno je $\triangle B''AC \cong \triangle SAC$ i $\triangle C''BA \cong \triangle SBA$. Prema tome je $P_A + P_B + P_C = P$ i odatle $\Sigma\varrho' = 3 + 1 = 4$.

---

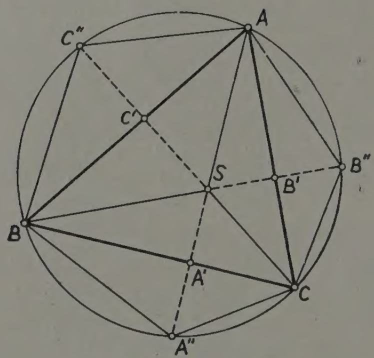
[1]) Vidi na pr. Hobson and Jessop, *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry,* Cambridge 1893, p. 228, 215.

2. Općenitiji teorem glasi:

Neka je u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru zadan n-dimenzionalni simpleks S_n sa svojih $(n+1)$ vrhova T_k, $k = 1, 2, \dots n+1$. Ako točkom T_k povučemo pravac p_k okomit na nasuprotnu $(n-1)$-dimenzionalnu hiperravninu π_k određenu točkama $T_1, T_2, \dots T_{k-1}, T_{k+1}, \dots T_{n+1}$, sjeći će p_k π_k u T_k' a simpleksu S_n opisanu hipersferu K_n u T_k'' tako, da je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \varrho_k' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_k T_k''}{T_k T_k'} = 2n. \tag{4}$$

Za ravninu je $n = 2$ pa (4) daje u **1**. razmotreni slučaj; za trodimenzionalni prostor (4) daje:



Sl. 1.

Visine, spuštene iz vrhova A, B, C, D tetraedra, sijeku ravnine njima nasuprotnih pobočaka u A', B', C', D', a tetraedru opisanu kuglu u A'', B'', C'', D'' tako, da je

$$\frac{AA''}{AA'} + \frac{BB''}{BB'} + \frac{CC''}{CC'} + \frac{DD''}{DD'} = 6. \tag{5}$$

Općeniti stavak dokazat ćemo analitički.

Za ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava s osima X_i, $i = 1, 2, \dots n$ uzet ćemo središte O_n hipersfere K_n. Točke T_k neka su s obzirom na taj sustav dane sa

$$T_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots x_{nk}),\ k = 1, 2, \dots n+1. \tag{6}$$

Budući da po pretpostavci točke T_k ne leže sve u istoj $(n-1)$-dimenzionalnoj hiperravnini, bit će

$$(7) \qquad D = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & 1 \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \dots & x_{n,n+1} & 1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

numeracija točaka T_k (orijentacija od S_n) neka je takova, da bude $D > 0$.

Jednadžba točki T_k nasuprotne hiperravnine bit će

$$(8) \qquad \pi_k \equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,k-1} & x_{2,k-1} & \dots & x_{n,k-1} & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ x_{1,k+1} & x_{2,k+1} & \dots & x_{n,k+1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \dots & x_{n,n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \dots n+1.$$

gdje su x_i $(i = 1, 2, \dots n)$ promjenljive koordinate točaka hiperravnine. Razvijemo li determinantu (8) po elementima k-tog retka, dobit ćemo

$$(9) \qquad \pi_k \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i + A_{n+1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots n+1,$$

gdje je A_{sr} $(s, r = 1, 2, \dots n+1)$ algebarski komplemenat elementa iz s-tog stupca i r-tog retka determinante D iz (7), ili u normalnom obliku

$$(10) \qquad \pi_k \equiv \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ik}^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i + A_{n+1,k} \right) = 0.$$

Odatle je

$$(11) \qquad T_k T_k' = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} A_{ik}^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_{ik} + A_{n+1,k} \right) = \frac{D}{P_k},$$

$$k = 1, 2, \dots n+1,$$

jer je vrijednost u zagradi jednaka razvoju determinante D iz (7) po elementima k-tog retka; sa P_k označena je pozitivna vrijednost od

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ik}^2}$$

Siječemo li K_n ravninom kroz O_n i p_k, lako uviđamo da je T_k'' udaljena od π_k isto toliko, koliko i točki T_k s obzirom na K_n dijametralno suprotna točka. Prema tome je

$$(12) \qquad T_k' T_k'' = \frac{1}{-P_k}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}(-x_{ik}) + A_{n+1,\,k}\right) =$$

$$= \frac{1}{P_k}(D - 2A_{n+1,\,k}), \quad k = 1, 2, \ldots n+1,$$

jer smatramo da je $T_k' T_k'' : T_k T_k'$ pozitivno ako T_k i T_k'' leže na raznim stranama od π_k.

Iz (11) i (12) dobivamo

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \varrho_k' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_k T_k''}{T_k T_k'} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_k T_k' + T_k' T_k''}{T_k T_k'} =$$

$$= (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{T_k' T_k''}{T_k T_k'} = (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\frac{1}{P_k}(D - 2A_{n+1,k})}{\frac{1}{P_k} D} =$$

$$= (n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{D - 2A_{n+1,\,k}}{D} = (n+1) + (n+1) - \frac{2}{D}\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,\,k};$$

kako je međutim

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1,\,k} = D$$

(razvoj od D iz (7) po elementima posljednjeg stupca) dobivamo konačno

$$(14) \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \varrho_k' = 2(n+1) - 2 = 2n,$$

što je trebalo dokazati.

3. Bilješka. P_k predočuje $(n-1)!$-terostruki iznos sadržine [$(n-1)$-dimenzionalnog volumena] simpleksa S_{nk} određenog točkama $T_1, T_2, \ldots T_{k-1}, T_{k+1}, \ldots T_{n+1}$ (»pobočka« simpleksa S_n nasuprot točke T_k), dok je $D\,n!$-terostruki iznos sadržine (n-dimenzionalnog volumena) simpleksa S_n. Kao što se vidi iz (13), izvedena je sumacija omjera odrezaka visina $T_k' \, T_k'' : T_k \, T_k'$ tako, da se iskoristila jednakost tog omjera s omjerom sadržina tim dužinama odgovarajućih n-dimenzionalnih simpleksa S''_{nk} (određenog točkama $T_1, T_2, \ldots T_{k-1}, T_k'', T_{k+1}, \ldots T_{n+1}$) i S_n; kako je kod tog drugog omjera drugi član neovisan o k, svedena je sumacija razlomaka na sumaciju njihovih brojnika, koju je bilo lako provesti. U biti, to je isti postupak, koji je primijenjen i u specijalnom slučaju za $n = 2$ promatranom u **1.**, samo što ovdje sumaciju sadržina od S''_{nk} (u **1.** ploštine P_A, P_B, P_C) očito nije bilo moguće provesti direktno geometrijski.

Iz navedenoga dalje izlazi da je dokazani općeniti teorem (4) ekvivalentan sa tvrdnjom, da je

$$\sum_{k=1}^{n+1} V\left(S''_{nk}\right) = (n-1)\, V\left(S_n\right), \tag{15}$$

t. j. suma sadržina simpleksa S''_{nk} jednaka je $(n-1)$-terostrukoj sadržini simpleksa S_n.

4. Iz (4) lako izlaze relacije između visine i polumjera opisane hipersfere n-dimenzionalnog analogona istostraničnog i pravokutnog istokračnog trokuta.

U prvom je slučaju

$$\varrho_k' = \frac{2R}{v} = \text{konst.}$$

pa (4) daje

$$(n+1)\,\frac{2R}{v} = 2n \quad \text{ili} \quad R = \frac{n}{n+1}\, v$$

(visina je ovdje ujedno i težišnica); dakle specijalno za istostranični trokut $R = \frac{2}{3}\, v$, a za pravilni tetraedar $R = \frac{3}{4}\, v$.

U drugom je slučaju, ako vrh u kojem se pod pravim kutom stječu jednake stranice, označimo sa T_1

$$\varrho_1' = \frac{2R}{v}\,; \;\; \varrho_i' = 1, \quad i = 2, 3, \ldots n+1$$

pa (4) daje

$$\frac{2R}{v} + n = 2n \quad \text{ili} \quad R = \frac{n}{2} v,$$

dakle specijalno za pravokutni istokračni trokut $R = v$, a za odgovarajući tetraedar $R = \frac{3}{2} v$.

II.

5. Drugi teorem, koji poopćujemo, je ovaj.

Neka je r polumjer nekom trokutu upisane kružnice, a r_1, r_2, r_3 neka su polumjeri vanjskih dodirnih kružnica toga trokuta; onda je

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}. \tag{16}$$

Dokazat ćemo da vrijedi ovaj općenitiji teorem:

Neka je r_n polumjer simpleksu S_n upisane hipersfere, a r_{nk} neka su polumjeri vanjskih dodirnih hipersfera toga simpleksa. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_{nk}} = (n-1) \frac{1}{r_n}. \tag{17}$$

Za ishodište koordinatnog sustava uzmimo neku točku unutar S_n; obzirom na taj sustav dan je S_n sa

$$T_k (x_{1k}, x_{2k}, \ldots x_{nk}); \quad k = 1, 2, \ldots n+1. \tag{18}$$

Analogno kao u 2., (9) će biti jednadžbe »pobočaka« od S_n

$$\pi_k \equiv \sum_{i=1}^{n} A_{ik} x_i + A_{n+1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n+1. \tag{19}$$

Podijelimo li svaku od tih jednadžbi sa $\pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ik}^2}$, uzevši za predznak korijena predznak od $A_{n+1,k}$, dobit ćemo jednadžbe π_k u normalnom obliku

$$\pi_k \equiv \sum_{i=1}^{n} N_{ik} x_i + N_{n+1,k} = 0. \tag{20}$$

Označimo li sa x_{io} koordinate središta hipersfere upisane u S_n, bit će dakle

(21) $$\sum_{i=1}^{n} N_{ik} x_{io} + 1 \cdot N_{n+1,k} = r_n, \quad k = 1, 2, \ldots n+1$$

odakle je

(22) $$1 = \frac{r_n}{D_n} \sum_{k=1}^{n+1} \overline{N}_{n+1,k} \quad \text{ili} \quad \frac{1}{r_n} = \frac{\overline{N}}{D_n} \quad \left(\overline{N} = \sum_{k=1}^{n+1} \overline{N}_{n+1,k}\right)$$

gdje je D_n determinanta $|N_{sr}|$ $(s, r = 1, 2, \ldots n+1)$, a $\overline{N}_{n+1,k}$ algebarski komplemenat elementa $N_{n+1,k}$ te determinante; lako se uviđa da je $D_n \neq 0$.

Analogno, ako su

$$O_{nk} (x'_{1k}, x'_{2k}, \ldots x'_{nk}), \quad k = 1, 2, \ldots n+1$$

središta vanjskih dodirnih hipersfera, to iz

(23) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} N_{i\varkappa} x'_{i\varkappa} + N_{n+1,\varkappa} = r_{n\varkappa}, & \varkappa = 1, 2, \ldots k-1, k+1, \ldots n+1 \\ \sum_{i=1}^{n} N_{ik} x'_{ik} + N_{n+1,k} = -r_{nk} \end{cases}$$

izlazi

(24) $$\frac{1}{r_{nk}} = \frac{1}{D_n} (\overline{N} - 2\,\overline{N}_{n+1,k})$$

pa je

(25) $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{r_{nk}} = \frac{1}{D_n} \left[(n+1)\,\overline{N} - 2 \sum_{k=1}^{n+1} \overline{N}_{n+1,k}\right] = \frac{n-1}{D_n} \overline{N} = \frac{n-1}{r_n},$$

što je trebalo dokazati.

(Primljeno 6. II. 1951.)

VERALLGEMEINERUNG ZWEIER PLANIMETRISCHEN THEOREME AUF DEN n-DIMENSIONALEN RAUM

Von Vladimir Devidé, Zagreb

Zusammenfassung

I.

Das erste planimetrische Theorem, das auf den n-dimensionalen Raum verallgemeinert wird, ist das folgende:

Die Senkrechten, die von den Eckpunkten ABC eines Dreiecks auf die ihnen gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, mögen diese in A', B', C', und den Umkreis des Dreiecks in A'', B'', C'' treffen. Dann gilt (1).

Der Beweis ist aus (2), (3) und (wegen $\triangle A''CB = \triangle SCB$ usw.) $P_A + P_B + P_C = P$ ersichtlich. (Abb. 1.)

Die Verallgemeinerung lautet:

Im n-dimensionalen euklidischen Raume sei das Simplex S_n durch T_k, $k = 1, 2, \ldots n+1$ gegeben. Die Senkrechte p_k die von T_k aus auf die diesem Punkte gegenüberliegende $(n-1)$-dimensionale Hyperebene π_k (bestimmt durch $T_1, T_2, \ldots T_{k-1}$, $T_{k+1} \ldots T_{n+1}$) gefällt wird, möge π_k in T_k' und die dem Simplex S_n umbeschriebene Hypersphäre K_n in T_k'' treffen. Dann gilt (4).

Für $n = 3$ ergibt sich:

Die Senkrechten, die von den Eckpunkten A, B, C, D eines Tetraeders auf die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen gefällt werden, treffen diese in A', B', C', D' und die Umkugel des Tetraeders in A'', B'', C'', D'' so, dass (5) gilt.

Beweis des allgemeinen Satzes:

Das Zentrum O_n von K_n sei der Koordinatenausgangspunkt; T_k sind dann mit (6) und π_k mit (8) und (9) gegeben. A_{sr} ist dabei das algebraische Komplement des Elements aus der s-ten Spalte und der r-ten Zeile der Determinante D in (7); D ist

sicher von Null verschieden, und zwar sei die Numerierung der Ecken so gewählt, dass $D > 0$ wird.

(10) ist die Hesse'sche Normalform von (9); daraus folgt (11), wo P_k der positiv genommene Wert von

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ik}^2}$$

ist.

Wird K_n mit einer Ebene durch O_n und p_k geschnitten, so ist leicht einzusehen, dass T_k'' von π_k dieselbe Entfernung hat, wie der in bezug auf K_n dem Punkte T_k diametral gegenüberliegende Punkt; es gilt also (12), wo das Vorzeichen so gewählt wurde, dass $T_k' T_k'' : T_k T_k'$ positiv ist, falls T_k und T_k'' auf verschiedenen Seiten von π_k liegen. Aus (11) und (12) folgt (13); die letzte Summe in (13) ist aber gleich D, da sie die Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der letzten Spalte darstellt, und damit ist (4) mit (14) bewiesen.

Bemerkung. P_k stellt den $(n-1)!$-fachen Inhalt des Simplex S_{nk}, der durch die Punkte $T_1, T_2, \dots T_{k-1}, T_{k+1}, \dots T_{n+1}$ bestimmt ist, dar, während D der $n!$-fache Inhalt von S_n ist. Wie aus (13) ersichtlich, wurde die Summation der Verhältnisse der Höhenabschnitte $T_k' T_k''$ und $T_k T_k'$ so durchgeführt, dass von der Gleichheit dieses Verhältnisses mit dem Verhältnisse der Inhalte der diesen Höhenabschnitten entsprechenden Simplexen S_{nk}'' $(T_1, T_2, \dots T_{k-1}, T_k'', T_{k+1}, \dots T_{n+1})$ und S_n Brauch gemacht wurde. Bei diesen letzten Verhältnissen ist das zweite Glied von k unabhängig, so dass die Summation der Brüche auf die Summation ihrer Zähler zurückgeführt wurde. Das ist im Grunde dasselbe Verfahren, das in **1.** für den Spezialfall $n = 2$ angewandt wurde; nur war hier die Summation der Inhalte von S_{nk}'' (in **1.** die Flächeninhalte P_a, P_b, P_c) natürlich nicht direkt geometrisch ausführbar.

In **4.** wurden aus (4) Relationen zwischen der Höhe und dem Durchmesser der umbeschriebenen Hypersphäre n-dimensionaler Analogone des gleichseitigen und rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks abgeleitet.

II.

Das zweite Theorem ist das folgende:

Es sei r_n *der Halbmesser der dem Simplex* S_n *einbeschriebenen Hypersphäre* K_{no}, *und* r_{nk}, $k = 1, 2, \ldots n + 1$ *seien die Halbmesser der das Simplex von aussen berührenden Hypersphären* K_{nk}. *Dann gilt (17).*

Beweis. Als Koordinatenausgangspunkt sei ein Punkt innerhalb S_n gewählt. Werden die Gleichungen (19) der $(n-1)$-dimensionalen Seitenräume von S_n mittels Teilung mit $\pm \sum_{i=1}^{n} A_{ik}^2$ (mit dem Vorzeichen von $A_{n+1,k}$) auf die Hesse'sche Normalform (20) gebracht, so folgt aus (21) (22). Dabei sind: x_{io} die Koordinaten des Zentrums von K_{no}; D_n die Determinante $|N_{sr}|$ $(s, r = 1, 2, \ldots n+1)$; $\overline{N}_{n+1,k}$ das algebraische Komplement des Elements $N_{n+1,k}$ dieser Determinante. Wie leicht einzusehen, ist $D_n \neq 0$. Analog, sind

$$O_{nk}\,(x'_{1k}, x'_{2k}, \ldots x'_{nk}),\ \ k = 1, 2, \ldots n+1$$

die Zentrume von K_{nk}, so folgen aus (23) die Gleichungen (24); wegen (22) und (24) ist dann mit (25) das Theorem bewiesen.

O RASIPU SACME

Ing. Mladen Szabo, Zagreb

U ovom članku pokušat ćemo izvesti kvantitativne zakone radijalnog rasipa sačme. Kod izlaza sačme iz cijevi puške tlak plinova izgorenog baruta akcelerira onaj dio sačme, koji se već nalazi izvan cijevi i u radijalnom smjeru i time prouzrokovani rasip nazvat ćemo »inherentni rasip«.

Po prestanku djelovanja tlaka plinova baruta djeluje još kratko vrijeme otpor zraka slično kao tlak plinova, t. j. još tako dugo, dok se zrna sačme dodiruju, pa povećava radijalne brzine sačme. Time prouzrokovani rasip nazivamo »zračni rasip«.

Inherentnom i zračnom rasipu superponiran je konačno »individualni rasip« prouzrokovan deformacijom i nejednakošću zrna sačme, deformacijom i nehomogenosti čepa, otporom zraka individualnih zrna, nejednakim uslovima od hica do hica i t. d.

Kod računa, koji ćemo provesti za inherentni i zračni rasip hica sačmom iz cilindrično bušenih cijevi, trebalo je uvesti stanovite osnovne aproksimacije. Stupac sačme iz individualnih zrna zamijenjen je stupcem tekućine bez unutrašnjeg trenja odgovarajuće specifične težine. Druga se osnovna aproksimacija sastoji u tome, što je takav stupac »sačme« podijeljen na elementarne pločice s pretpostavkom, da njihove granične plohe (krugovi) ostaju prigodom izlaza iz cijevi ravne, pa je uzeta u promatranje samo radijalna akceleracija.

Upotrebljene su ove oznake:

p tlak plinova baruta na čep (reduciran na masu čepa i otpor $= 0$ i $p = \text{const.}$)

p_L tlak otpora zraka

P pritisak na elementarnu pločicu

v brzina sačme na izlazu iz cijevi (pretpostavka $v = \text{const.}$)

w radijalna brzina sačme na radiju r

w_T radijalna brzina rubne sačme ($r = \varrho_T$) kod inherentnog rasipa u vrijeme T

w_z radijalna brzina rubne sačme kod zračnog rasipa

t individualno vrijeme za jednu elementarnu pločicu kod inherentnog rasipa

T vrijeme djelovanja sile P kod inherentnog rasipa

t vrijeme kod zračnog rasipa, jednako za sve elementarne pločice. U momentu svršetka inherentnog rasipa je $t = 0$

a_o početna debljina elementarne pločice

a debljina elementarne pločice

R polumjer cijevi

ϱ vanjski polumjer elementarne pločice

ϱ_T vanjski polumjer elementarne pločice u vrijeme T

b udaljenost elementarne pločice od vrha stupca sačme, uz pretpostavku $b/H_s = \text{const.}$

H_s visina stupca sačme

H_p visina čepa i podložnih pločica

H_f put naknadnog djelovanja tlaka plinova baruta reduciran s obzirom na pretpostavku $p = \text{const.}$

η_a procent posipa na meti u vanjskom krugu promjera 75 cm

η_i procent posipa na meti u unutrašnjem krugu promjera 37,5 cm

G težina naboja sačme

μ specifična masa tekućine (»sačme«)

g akceleracija sile teže

Inherentni rasip

Iz sl. 1. se vidi, da vrijedi:

$$P \approx R^2 \pi \frac{p - p_L}{H_s} h .$$

$$H = H_s + H_p + H_f + H_o ,$$

$$H_o = \frac{p_L}{p - p_L} H_s ,$$

$$h = H_o + b .$$

$$T = \frac{H_s + H_p + H_f - b}{v} = \frac{H - h}{v} .$$

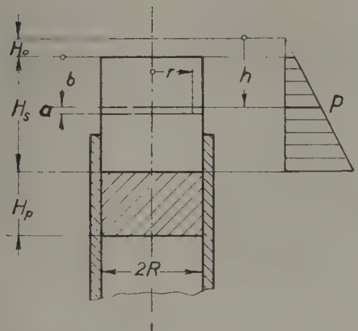
$$\mu = \frac{G}{R^2 \pi H_s g} .$$

Iz konstantnosti volumena sačme, koja se u elementarnoj pločici nalazi unutar kružnice s polumjerom r, izlazi:

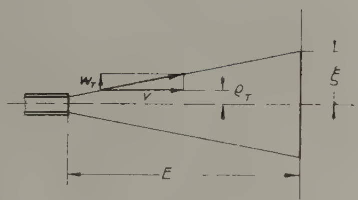
$$d(r^2 \pi a) = 0$$

$$2 r \pi a dr = - r^2 \pi da ,$$

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{r}{2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = w . \tag{1}$$



Sl. 1. Naboj na izlazu iz cijevi.



Sl. 2. Hitac na metu.

Za vanjski polumjer ϱ pločice vrijedi

$$\varrho^2 \pi a = R^2 \pi a_o$$

ili

$$\varrho = R \sqrt{\frac{a_o}{a}}\,. \tag{2}$$

Iz uvjeta, da je povećanje kinetičke energije radijalnog strujanja jednako radnji sile P na putu da, izlazi:

$$-P\,da = d \int \frac{w^2}{2}\,dm\,,$$

gdje je masa

$$dm = 2\,r\pi\mu a\,dr,$$

dakle

$$-R^2\pi\,(p - p_L)\,\frac{h}{H_s}\,da = d \int_0^{\varrho} \frac{\pi}{4}\,\mu a r^3 dr \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \frac{1}{a^2}$$

ili

$$-R^2\,(p - p_L)\,\frac{h}{H_s}\,da = d \int_0^{\varrho} \frac{\mu}{4a} \left(\frac{da}{dt}\right)^2 r^3 dr = d \left[\frac{\mu}{16a} \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \varrho^4\right] =$$

$$= d \left[\frac{\mu R^4}{16}\,\frac{a_o^2}{a^3} \left(\frac{da}{dt}\right)^2\right]$$

i, uz supstituciju

$$B = \frac{4\,(p - p_L)}{R^2 \mu H_s}\,h\,, \tag{3}$$

$$-4\,B\,da = d \left[\frac{a_o^2}{a^3} \left(\frac{da}{dt}\right)^2\right],$$

$$\frac{a_o^2}{a^3} \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = C - 4\,B\,a\,.$$

Integraciona konstanta C dobiva se iz uvjeta, da je za $t=0$ $v=0$, t. j. $\frac{da}{dt}=0$ i $a=a_0$. Bit će stoga

$$C = B a_o ,$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{4B}{a_o^2} a^3 (a_o - a) ,$$

$$\frac{da}{dt} = - \frac{2}{a_o} \sqrt{B a^3 (a_o - a)} .$$

gdje je uzet negativni predznak drugog korijena, jer je $da < 0$. Dalje je

$$dt = \frac{-a_o da}{2\sqrt{B a^3 (a_o - a)}} ,$$

što pomoću supstitucije

$$a = y^2, \quad da = 2y\,dy$$

daje

$$t + C_1 = - \frac{1}{\sqrt{B}} \int \frac{a_o dy}{y^2 \sqrt{a_o - y^2}} = \frac{\sqrt{a_o - y^2}}{y\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{a_o - a}{aB}} .$$

Za $t=0$, $a=a_0$ izlazi $C_1=0$, dakle

$$a = \frac{a_o}{1 + Bt^2} , \tag{4}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2a_o Bt}{(1+Bt^2)^2} . \tag{5}$$

Jednadžbe (4) i (5) uvrštene u (1) daju

$$w = \frac{rBt}{1+Bt^2} . \tag{6}$$

Vanjski radiji stupca sačme bit će u momentu svršenog izlaza prema jednadžbama (2) i (4)

$$\varrho_T = R\sqrt{1+BT^2} , \tag{7}$$

pa sa $r = \varrho_T$ i $t = T$ izlazi iz (6), da je maksimalna radijalna brzina rubne sačme na izlazu iz cijevi kod inherentnog rasipa

$$w_T = \frac{RBT}{\sqrt{1+BT^2}} = \frac{4(p-p_L)g\pi R}{Gv} \frac{(H-h)h}{\sqrt{1+\frac{4(p-p_L)g\pi}{Gv^2}(H-h)^2 h}} . \tag{8}$$

Kod izračunavanja raspodjele sačme na meti odnosno posipa označit ćemo sa ξ udaljenost na meti rubnih zrna »sačme« jedne elementarne pločice od središta mete (sl. 2), a sa η procente sačme u krugu mete sa polumjerom x (sl. 3) i uzet ćemo normiranu metu

s vanjskim krugom od 75 cm promjera i unutrašnjim od 37,5 cm na normiranu udaljenost od 35 m. Dobivamo

$$\xi = \frac{E+h-H}{v} w_T + \varrho_T \tag{9}$$

ili aproksimativno

$$\xi = \frac{E}{v} w_T + R\,. \tag{10}$$

Dalje vrijedi za $x < \xi$

$$d\eta = 100 \frac{dh}{H_s} \cdot \frac{x^2}{\xi^2},$$

pa je stoga

$$\eta = \frac{100}{H_s} \left(b_x + x^2 \int\limits_{h=h_x}^{h=H_0+H_s} \frac{dh}{\xi^2} \right). \tag{11}$$

Za izračunavanje $\int \frac{dh}{\xi^2}$ pojednostavnit ćemo formulu (8) uzevši aproksimaciju

$$\psi = 1 \Bigg/ \sqrt{1 + \frac{4(p-p_L)g\pi}{Gv^2}(H-h)^2 h}$$

gdje ćemo konstantu ψ izračunati kao aritmetičku sredinu vrijednosti

$$1 \Bigg/ \sqrt{1 + \frac{4(p-p_L)g\pi}{Gv^2}(H-h)^2 h}$$

u dotičnom intervalu:

$$w_T \approx \psi \frac{4(p-p_L)g\pi R}{Gv}(H-h)h = K(H-h)h\,. \tag{12}$$

Iz formule (10) i (12) se dobiva

$$\xi = \frac{EK}{v}(H-h)h + R, \tag{13}$$

$$\int \frac{dh}{\xi^2} = \left(\frac{v}{EK}\right)^2 \int \frac{dh}{\left(\frac{Rv}{EK} + Hh - h^2\right)^2}$$

i sa

$$\Delta = \frac{Rv}{EK} + \frac{H^2}{4}$$

konačno

$$\int\limits_{h=h_x}^{h=H_0+H_s} \frac{dh}{\xi^2} = \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{v}{EK}\right)^2 \left[\frac{h-\frac{H}{2}}{\frac{Rv}{EK} + Hh - h^2} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arth} \frac{\frac{H}{2} - h}{\sqrt{\Delta}} \right]_{h_x}^{H_0+H_s}. \tag{14}$$

Zračni rasip

Račun se provodi analogno onom kod inherentnog rasipa, ali uz uvjet, da je prema (4) u trenutku $t = 0$

$$a = \frac{a_o}{1 + BT^2},$$

dakle prema (5)

$$\frac{da}{dt} = \frac{-2a_o BT}{(1 + BT^2)^2}.$$

pa se sa

$$P \approx R^2 \pi p_L \frac{H_s - b}{H_s}$$

kratkim računom dobiva za vanjske radije stupca sačme

$$\varrho = \frac{R}{\sqrt{\frac{A + B^2T^2}{1 + BT^2}}} \sqrt{A + \left(BT + \frac{A + B^2T^2}{1 + BT^2}\, t\right)^2} \tag{15}$$

i za maksimalnu radijalnu brzinu rubne sačme kod zračnog rasipa

$$w_z = \frac{R \sqrt{\frac{A + B^2T^2}{1 + BT^2}} \left(BT + \frac{A + B^2T^2}{1 + BT^2} \cdot t\right)}{\sqrt{A + \left(BT + \frac{A + B^2T^2}{1 + BT^2} \cdot t\right)^2}}, \tag{16}$$

gdje je

$$A = \frac{4\, p_L \pi g}{G} (H_s - b),$$

$$B = \frac{4\,(p - p_L)\, \pi g}{G}\, h,$$

$$T = \frac{H - h}{v}.$$

Kod numeričkog izračunavanja zračnog posipa uzeta je za ξ aproksimacija prema formuli (10), a procenti zračnog posipa računani su iz formule (11), gdje je vrijednost $\int \frac{dh}{\xi^2}$ dobivena planimetriranjem.

Na temelju dobivenih formula proveden je proračun rasipa za hitac sačmom iz cilindrično bušenih cijevi kalibra 12 i kalibra 20, oboje za patrone duge 70 mm, te s ovim mjerama odnosno vrijednostima:

za kal. 12/70 i kal. 20/70:

$p = 25$ kg/cm² $\quad p_L = 0{,}9$ kg/cm² $\quad v = 375$ m/s $\quad E = 35$ m
$H_s = 2{,}1$ cm $\quad H_p = 1{,}2$ cm

i vrijeme djelovanja zračnog rastura grubo procijenjeno sa $t = 4/10000$ s, što odgovara putu djelovanja od 15 cm

za kal. 12/70:

$R = 0{,}92$ cm $\quad G = 36$ g

$H_f = 0{,}35$ cm i $0{,}70$ cm (procijenjeno kao granične vrijednosti)

za kal. 20/70:

$R = 0{,}795$ cm

$G = 26{,}882$ g (t. j. s istom specifičnom masom kao kod kal. 12)

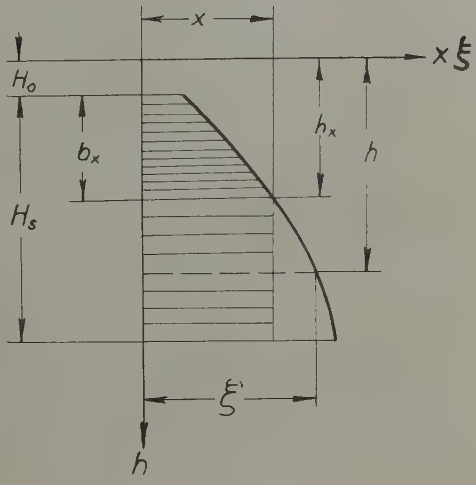
$H_f = 0{,}3$ cm i $0{,}6$ cm (procijenjeno kao granične vrijednosti)

U tablici navedeni su za inherentni, odnosno za inherentni i zračni rasip procenti posipa η_a u krugu mete od 75 cm promjera, procenti posipa η_i u unutrašnjem krugu mete od 37,5 cm promjera i koncentracija pogodaka prema sredini u skladu s propisima »Deutsche Versuchsanstalt für Handfeuerwaffen E. V. Wannsee: Schrotschussbeurteilung, 1937« $\left(\text{koncentracija} = \dfrac{3\,\eta_i}{\eta_a - \eta_i}\right)$.

kalibar	12/70				20/70			
H_f cm	0,35	0,70	0,35	0,70	0,30	0,60	0,30	0,60
η_a %	60,0	52,1	49,5	42,3	52,6	46,5	41,4	36,3
η_i %	26,1	22,7	13,6	11,5	22,4	19,8	10,8	9,5
koncentracija	2,31	2,31	1,13	1,12	2,23	2,23	1,06	1,06
rasip	inherentni		inherentni i zračni		inherentni		inherentni i zračni	

Slika 4 odnosno slika 5 prikazuju radijalne brzine rubne sačme kod istih slučajeva za kal. 12/70 i kal. 20/70.

Rezultati iz ove tablice odgovaraju dostatno točno praksom utvrđenim posipima i koncentracijama, uzme li se u obzir, da još svemu superponirani individualni rasip dalje smanjuje procente po-

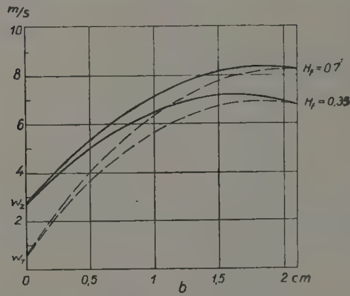


Sl. 3. Raspodjela sačme na meti.

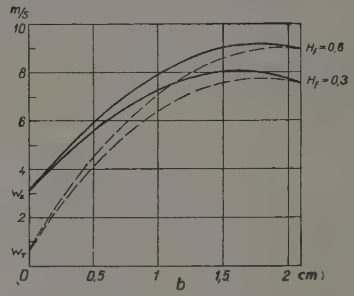
sipa i koncentraciju. Svakako se može zaključiti, da uzete osnovne aproksimacije kao i procjena nekih vrijednosti kod računa nisu od bitnog utjecaja na proračun radijalnog rasipa, te da se na temelju proračuna u najmanju ruku mogu razjasniti poznate osebine hica sačmom.

Poznato je, da je rasip sačme najveći kod zadnjeg dijela naboja. Razlog tome nije samo veća deformacija zrna, kako to navodi literatura o lovačkom oružju*, nego inherentni rasip, koji je i glavni faktor cjelokupnog rasipa (vidi sl. 4 i sl. 5).

Lošiji posip kod manjih kalibara nije posljedica procentualno većeg dijela obodnih zrna sačme, koja se više deformiraju, dakle posljedica individualnog rasipa, već se vidi, da su inherentni i zračni rasip aproksimativno obratno proporcionalni promjeru cijevi.



Sl. 4. Radijalne brzine rubne sačme na izlazu iz cijevi za kal. 12/70.



Sl. 5. Radijalne brzine rubne sačme na izlazu iz cijevi za kal. 20/70.

Smanji li se kod iste patrone tlak plinova na izlazu ili znatnijim produženjem cijevi ili napravom koja dopušta predizlaz plinova pri kraju cijevi (slično kao kod Cutt's compensator) to će se poboljšati posip (cilindrično bušenih cijevi).

Za poboljšanje posipa uvela je praksa već odavno mjesto cilindrično bušenih cijevi, cijevi sužene na izlazu (choke bore). »Choke« djeluje tako, da daje sačmi radijalnu brzinu prema osi prije izlaza iz cijevi i da koči čep i time smanjuje pritisak plinova baruta na stupac sačme na izlazu.

Osim radijalnog rasipa pokazuje hitac sačmom i velik aksijalan rasip sačme, pa bi bilo potrebno istražiti, u koju kategoriju rasipa on spada. Kod toga se ne bi mogla zadržati naša druga osnovna aproksimacija, da su plohe radijalnog strujanja ravnine okomite na os cijevi.

(Primljeno 26. II. 1951.)

---

*) Ivković: Puška sačmarica, 1949. Journée: Tir des fusils de chasse, 1920., Mahrholdt: Waffenlexikon, 1937., Preuss: Jagdwaffen, 1930., Schmuderer-Maretsch: Die Lehre vom Schuss, 1926., Schmuderer-Maretsch: Anleitung zum Flintenschiessen, 1930.

ÜBER DIE SCHROTSCHUSS-STREUUNG

Von Ing. Mladen Szabo, Zagreb

Zusammenfassung

Es wird versucht die Schrotstreuung rechnerisch zu erfassen. Die Streuung zerlegt der Autor in die vom Nachschub der Pulvergase beim Austritt der Ladung aus dem Rohr verursachte »inhärente« Streuung, in die vom Luftwiderstand der anfangs noch zusammenhängenden Schrotsäule verursachte »Luft«-Streuung und die dazu überlagerte vom Luftwiderstand der Einzelschrote, Schrot- und Propfendeformation und so weiter verursachte »Individual«-Streuung.

Bei der Berechnung der inhärenten und der Luft-Streuung aus Zylinderläufen werden zwei grundsätzliche Vereinfachungen gemacht. Die Schrotladung wird durch eine ideale Flüssigkeit ersetzt und es wird vorausgesetzt, dass die Stromlinienflächen der Radialströmung eben und senkrecht zur Achse sind.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- p Druck der Pulvergase auf den Propfen (reduziert für Propfen-Masse und Widerstand $= 0$ und $p = \text{const.}$)
- p_L Luftwiderstandsdruck
- P Druckkraft auf die Elementarscheibe
- v Schrotgeschwindigkeit an der Mündung ($v = \text{const.}$)
- w Radialgeschwindigkeit am Radius r
- w_T Radialgeschwindigkeit der Randschrote zur Zeit T
- w_z Radialgeschwindigkeit der Randschrote bei Luftstreuung
- t Individualzeit für eine Elementarscheibe bei inhärenter Streuung
- T Wirkungsdauer der Kraft P bei inhärenter Streuung
- t Universalzeit bei Luftstreuung
- a_o Anfangsdicke der Elementarscheibe
- a Dicke der Elementarscheibe
- R Rohrhalbmesser
- ϱ Aussenradius der Elementarscheibe
- ϱ_T Aussenradius der Elementarscheibe zur Zeit T
- b Elementarscheibenentfernung vom Vorderende der Schrotsäule (Voraussetzung $b/H_s = \text{const.}$)
- H_s Schrotsäulenhöhe
- H_p Höhe des Propfens und der Unterlagscheiben

H_f Nachwirkungsweg der Pulvergase (reduziert unter der Voraussetzung $p = \text{const.}$)
η_a Trefferprozente im Aussenkreis
η_i Trefferprozente im Innenkreis
G Gewicht der Schrotladung
μ spezifische Masse der »Schrot«-Flüssigkeit
g Erdbeschleunigung

Bild 1: Schrotladung bei Mündungsaustritt
Bild 2: Schuss auf die Scheibe
Bild 3: Schrotverteilung auf der Scheibe

Die Resultate der Berechnung sind auf Grund der im Text angegebenen Werte in der Tabelle für Kaliber 12 und 20 zusammengestellt und stimmen genügend genau mit der Praxis überein, wenn man in Betracht zieht, dass zu den berechneten Streuungen noch die Individualstreuung dazukommt. Es ist deshalb anzunehmen, dass die gemachten grundsätzlichen Approximationen nicht vom wesentlichen Einfluss auf die Berechnung der radialen Streuung sind. Aus den Resultaten kann man die grössere Streuung der hinteren Schrote, die schlechtere Leistung der kleineren Kaliber und die bessere Leistung bei genügendem Voraustritt der Pulvergase zwanglos erklären. Die Würgebohrung erteilt den Schroten eine nach innen gerichtete Radialgeschwindigkeit vor Schrotaustritt und bremst den Propfen beim Austritt.

Es wäre auch zu untersuchen in welche Kategorie die grosse Längsstreuung der Schrote fällt.

KAKO SE ODREĐUJE DUŽINA PERIODA PERIODSKIH RAZLOMAKA

Stjepan Škreblin, Zagreb

Istraživanja o periodskim razlomcima vrlo su interesantna i instruktivna. Ona spadaju u područje teorije brojeva. Osnovni poučci teorije brojeva mnogo pomažu protumačiti osobine periodskih razlomaka i odgovoriti na razna pitanja, koja se tu mogu postaviti.

Pokazat ćemo, kako se određuje dužina perioda periodskih razlomaka t. j. broj znamenaka, od koga se period nekog razlomka sastoji. Problemima, koji su s tim u vezi, bavili su se naročito Jacobi i Gauss.

1. *Osnovni poučak*

Neka je $r = \frac{b}{n}$ razlomak, kome su brojnik i nazivnik relativno prosti i gdje je $b < n$, a n ne sadržava nikakvih faktora baze. Slučaj, gdje n uz druge faktore sadržava i faktore baze, može se lako svesti na prethodni. Na pr.

$$\frac{17}{104} = \frac{17}{2^3 \cdot 13} = \frac{17 \cdot 5^3}{10^3 \cdot 13} = \frac{163 \cdot 13 + 6}{10^3 \cdot 13} = \frac{163}{10^3} + \frac{1}{10^3}\,\frac{6}{13};$$

Ako $\frac{b}{n}$ pretvaramo u decimalni razlomak, dolazimo do jednakosti $b = r_0$ (prvi ostatak) i do kongruencija

$$r_1 \equiv b \cdot 10\,, \quad r_2 \equiv r_1 \cdot 10 \equiv b \cdot 10^2\,, \quad r_3 \equiv r_2 \cdot 10 \equiv b \cdot 10^3 \ldots \pmod{n}$$

Po pretpostavci je b i 10 prosto prema n, pa su onda i ostaci $r_0, r_1, r_2, \ldots$ prosti prema n. Njihov broj ne može dakle biti veći od $\varphi(n)$. Međutim, s obzirom na modul n među sobom različiti su samo ostaci potencija 10^0, $10^1 \ldots 10^{t-1}$, pa onda i ostaci od $b \cdot 10^0$, $b \cdot 10^1, \ldots b \cdot 10^{t-1}$ ili brojevi $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{t-1}$, ako je t *gausijana* od n t. j. najniža od nule različita potencija od 10, za koju je ispunjena kongruencija $10^t \equiv 1 \pmod{n}$. Kažemo također, da 10 pripada eksponentu t za modul n. Tako dolazimo do osnovnog poučka:

Dužina perioda razlomka $\frac{b}{n}$ *, gdje je* n *prosto i prema* b *i prema bazi, jednaka je gausijani od* n. Dužina je perioda razlomka $\frac{1}{13}$ jednaka 6, jer je $10^1 \equiv -3 \pmod{13}$, $10^3 \equiv -27 \equiv -1 \pmod{13}$, i $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$.

Dužina perioda razlomka $\frac{1}{73}$ jednaka je 8, jer je $10^8 \equiv 1 \pmod{73}$.

Ovo vrijedi i za složene module.

Na pr. $n = 189$, $10^2 \equiv -89 \pmod{189}$, $10^3 \equiv 55 \pmod{189}$, $10^6 \equiv 1 \pmod{189}$.

Dužina perioda razlomka, komu je nazivnik potencija prostog broja, može se izračunati također iz dužine perioda za sam prost broj p.

Nalazi se lako, ako je dužina perioda od $\frac{1}{p^2}$ jednaka t', da je redovno $t' = tp$. Onda je dužina perioda od $\frac{1}{p^3}$ jednaka tp^2 i općenito od $\frac{1}{p^s}$ jednaka je tp^{s-1}.

Izuzetak nastupa, kad se p nalazi u periodu za $\frac{1}{p}$, onda je dužina perioda i za $\frac{1}{p}$ i za $\frac{1}{p^2}$ jednak t, a za $\frac{1}{p^s}$ jednak je tp^{s-2} i t. d.

U dekadskom brojnom sistemu poznata su dosad samo 2 broja tako, da je $10^t \equiv 1 \pmod{p^2}$; to su broj 3, jer je $10^1 \equiv 1$ i mod 3 i mod 3^2, a također i 487, jer je $10^{486} \equiv 1$ mod 487 i mod $487^2 = 237169$. Ovo posljednje izlazi iz ovih kongruencija:

$$\begin{array}{llll}
10^5 \equiv 100000, & 10^6 \equiv 51324, & 10^8 \equiv 151851, & 10^{11} \equiv 62840, \\
10^{22} \equiv 1750, & 10^{44} \equiv 216472, & 10^{88} \equiv 38595, & 10^{176} \equiv 152705, \\
10^{220} \equiv 215878, & 10^{242} \equiv 213452, & 10^{243} \equiv -1, & 10^{486} \equiv 1 \pmod{237169}.
\end{array}$$

Periodi svih razlomaka, kojima su nazivnici prosti brojevi od 3—1000, nalaze se u Gaussovim sabranim djelima II. svezak, str. 412—434.

Dužina perioda složenih brojeva može se odrediti i tako, da se odrede gausijane svih međusobno relativno prostih faktora tih složenih brojeva i onda njihov najmanji zaj. višekratnik. Tako je na pr. dužina perioda od 76923 jednaka 6, jer je $76923 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$, a dužina perioda od 3^3 je 3, od 7 je 6, od 11 je 2, od 37 je 3, pa je $t = v(3, 6, 2, 3) = 6$.

2. *Uvjeti, uz koje je 10 kvadratni, kubni, bikvadratni, bibikvadratni ostatak prostog broja* p

Kažemo, da je neki broj a, koji nije djeljiv prostim brojem p, kvadratni ostatak od p, ako je moguća kongruencija $x^2 \equiv a \pmod{p}$. U tom je slučaju $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. I obrnuto, ako je ta kongruencija ispunjena, a je kvadratni ostatak od p. Budući da je $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, to je i $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$, što nam kazuje, da je ili $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ili je $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. Obje kongruencije ne mogu u isti čas postojati, jer bi onda i njihova razlika, koja je jednaka 2, bila djeljiva s p, a to je nemoguće.

Ako je $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, a se zove kvadratni *neostatak* od p, te se označuje kraće $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, dok simbol $\left(\frac{a}{p}\right) = +1$ znači, da je kvadratni ostatak od p.

Neposredno se razabira, da je produkt dvaju kvadratnih ostataka opet kvadratni ostatak, dvaju kvadratnih neostataka kvadratni ostatak, dok je produkt kvadratnog ostatka i neostatka kvadratni neostatak.

Ako je 10 kvadratni ostatak od p, onda je već $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, a nije tek $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. U tom slučaju nije dužina perioda jednaka $p-1$, već je jednaka $\frac{p-1}{2}$ ili i jedan dio od toga.

Da znamo, za koje je brojeve 10 kvadratni ostatak, treba odrediti, za koje su brojeve 2 i 5 kvadratni ostaci odnosno neostaci.

Za broj 2 vrijedi poučak, koji je našao Lagrange, a kazuje, da je 2 kvadratni ostatak za sve proste brojeve oblika $8k \pm 1$, a neostatak za sve proste brojeve oblika $8k \pm 3$. To se najbrže dokazuje[2]), da se obje strane jednakosti $2i = (1+i)^2$ potenciraju s $\frac{p-1}{2}$ i pomnože s $1+i$; onda izlazi

$$2^{\frac{p-1}{2}}\left(i^{\frac{p-1}{2}} + i^{\frac{p+1}{2}}\right) \equiv 1 \pm i \pmod{p}.$$

Za $p = 8k \pm 1$ izlazi $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, a za $p = 8k \pm 3$ dobivamo $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$. Taj se rezultat može sabrati u formuli

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

---

[2]) Vidi Kraïtchik, Recherches sur la théorie des nombres.

Pomoću kvadratnog zakona recipročnosti:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

ako se stavi za $q = 5$, izlazi, da je 5 kvadratni ostatak za sve proste brojeve oblika $5k \pm 1$, a neostatak za sve proste brojeve oblika $5k \pm 2$.

Odatle lako izlazi dalje[3]), da je 10 kvadratni ostatak prostih brojeva oblika $40k \pm 1$, $40k \pm 3$, $40k \pm 9$, $40k \pm 13$.

Primjer 1. Kolika je dužina perioda od 1439? Kako je taj broj oblika $40k - 1$, 10 je kvadratni ostatak tog broja, pa je $10^{\frac{1438}{2}} \equiv 10^{719} \equiv 1$ (mod 1439). Broj 719 je prost broj, pa je dužina perioda razlomka s nazivnikom 1439 jednaka 719.

2. Kolika je dužina perioda od 26459? Taj je broj oblika $40k + 19$, pa je 10 kvadratni neostatak tog broja; broj $\frac{26459 - 1}{2} = 13229$ je prost, pa je dužina perioda jednaka 26458.

Ako je moguća kongruencija $x^m \equiv a \pmod{p}$, gdje je a broj prost prema p, mora biti $a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$; δ znači $M(p-1, m)$. I obrnuto, ako je $a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$, onda je i $x^m \equiv a \pmod{p}$. Kad je p oblika $km + 1$, najveća zaj. mjera od m i $p-1$ je m, pa onda mora biti $a^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1 \pmod{p}$. Za $m = 3$, $a = 10$ imamo: kongruencija $x^3 \equiv 10 \pmod{p}$ je moguća, kad je $10^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$ i obrnuto.

Jacobi[4]) je pronašao uvjete, koji moraju biti ispunjeni, da 10 bude kubni ostatak prostog broja p: broj p mora biti oblika $6m + 1 = a^2 + 3b^2$ (svaki se prosti broj oblika $6m + 1$ dade napisati kao zbroj od jednog kvadrata i trostrukog drugog kvadrata i to samo na jedan jedini način). Osim toga mora umnožak ab biti djeljiv s 10. Ako su za proste brojeve $p = 6m + 1$ ti uvjeti ispunjeni, 10 je kubni ostatak prostog broja p, pa je dužina perioda od p jednaka $\frac{p-1}{3}$ ili jedan dio od toga.

Primjer 1. Neka se odredi dužina perioda od 967.

Broj 967 je oblika $6m + 1$, te je $967 = 10^2 + 3 \cdot 17^2$. Kako je $ab \equiv 0 \pmod{10}$, 10 je kubni ostatak od 967, pa je $10^{\frac{967-1}{3}} \equiv 1$ (mod 967) ili $10^{322} \equiv 1 \pmod{967}$. Kako je $966 = 3 \cdot 2 \cdot 161$, mogao bi ući

---

[3]) Vidi na pr. Cahen, Théorie des nombres, str. 133.

[4]) Vidi Kraïtchik, Recherches sur la théorie des nombres.

u obzir još kvadratni ostatak; ali je 967 oblika $40k+7$, pa 10 ne može biti kvadratni ostatak od 967. Zato je dužina perioda od 967 jednaka 322.

2. Kolika je dužina perioda od 9679? Broj 10 je kvadratni ostatak od 9679, jer je oblika $40k-1$, on je kubni ostatak od 9679, jer je $9679 = 98^2 + 3 \cdot 15^2$. Dakle je i $10^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{9679}$ i $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{9679}$, pa je zato i $10^{\frac{p-1}{6}} \equiv 1 \pmod{9679}$ ili $10^{1663} \equiv 1 \pmod{9679}$. Broj 1663 je prost, te je dužina perioda od 9679 jednaka 1663.

Gauss[4]) je pronašao uvjete, koji moraju biti ispunjeni, da 10 bude bikvadratni ostatak prostog broja p, t. j. da je $\left(\frac{10}{p}\right)_4 = +1$: prije svega prost broj p mora biti oblika $4m+1 = a^2 + b^2$ (svaki se prost broj oblika $4m+1$ dade napisati kao zbroj dvaju kvadrata i to na jedan jedini način). Neparni broj a mora također biti oblika $4k+1$; ako je a oblika $4k+3$, treba uzeti $-a$ mjesto a, jer je tada $-a$ oblika $4k+1$. Nadalje mora biti ispunjen jedan od ovih parova uvjeta:

$$\begin{array}{lll}
1. & b \equiv 0 \pmod 8, & b \equiv 0 \pmod 5, \\
2. & b \equiv 4 \pmod 8, & a \equiv 0 \pmod 5, \\
3. & b \equiv 2 \pmod 8, & a+b \equiv 0 \pmod 5, \\
4. & b \equiv -2 \pmod 8, & a-b \equiv 0 \pmod 5.
\end{array}$$

Primjer 1. Kolika je dužina perioda razlomka s nazivnikom 2477?

Broj 2477 je oblika $4m+1$, te je $2477 = (-19)^2 + 46^2$. Ispunjeni su uvjeti 4) $b \equiv -2 \pmod 8$, $a-b \equiv 0 \pmod 5$, pa je

$$10^{\frac{p-1}{4}} = 10^{619} \equiv 1 \pmod{2477}.$$

Broj 619 je prost broj, te je dužina perioda od 2477 jednaka 619.

2. Kolika je dužina perioda od 2677?

Broj 10 je kubni i bikvadratni ostatak od 2677, pa je $10^{\frac{p-1}{12}} \equiv 1 \pmod{2677}$, t. j. $10^{233} \equiv 1 \pmod{2677}$. Broj 233 je prost i dužina je perioda od 2677 jednaka 233.

Da bude 10 ostatak 8 potencije ili bibikvadratni ostatak prostog broja p, moraju prema Jacobi-u[4]) biti ispunjeni ovi uvjeti: $p = 8m+1 = a^2 + b^2 = c^2 + 2d^2$ (svaki prosti broj oblika $8m+1$ dade se napisati kao zbroj dvaju kvadrata, a također i kao zbroj kvadrata i dvostrukog drugog kvadrata). Nadalje mora biti $a \equiv 1 \pmod 4$, $c \equiv 1 \pmod 4$. (Ako su ti brojevi kongruentni 3 modulo 4, treba ih uzeti s negativnim predznakom).

Ako je: $b \equiv 0 \pmod 8$, tad je

$$\left(\frac{10}{p}\right)_8 \equiv (-1)^{\frac{a-1}{4} + \frac{b}{8}} \, a c (c^2 - d^2) \pmod 5$$

Ako je $b \equiv 4 \pmod 8$, tad je

$$\left(\frac{10}{p}\right)_8 \equiv (-1)^{\frac{a-1}{4}+\frac{b-4}{8}}\; b\,c\,(c^2-d^2) \pmod 5.$$

Primjeri 1. Kolika je dužina perioda od 3449?

Broj 3449 je oblika $8m+1$, pa je $3449 = (-43)^2 + 40^2 = 57^2 + 2 \cdot 10^2$, $b \equiv 0 \pmod 8$. Treba gledati čemu je kongruentno $(-1)^{-11+5}(-43)\, 57\, (3249 - 100) \pmod 5$.

Nalazimo, da je to kongruentno

$$(-1)(-43)(57)(3149) \equiv (-1)(+4) \equiv -4 \equiv +1 \pmod 5.$$

Zato je $\left(\frac{10}{p}\right)_8 = +1$, pa je 10 bibikvadratni ostatak od 3449, te je

$$10^{\frac{3449-1}{8}} = 10^{431} \equiv 1 \pmod{3449}.$$

Dužina perioda od 3449 jednaka je 431.

2. Kolika je dužina perioda od $\frac{1}{11689}$?

Broj $11689 = 83^2 + 3 \cdot 40^2 = 5^2 + 108^2 = (-67)^2 + 2 \cdot 60^2$. Ispunjeni su uvjeti, da je 10 kubni ostatak od 11689, a također i bibikvadratni ostatak od 11689, jer je $b \equiv 4 \pmod 8$.

$(-1)^{1+13}\, 108\, (-67)\, (67^2 - 60^2) \equiv -1 \cdot 9 \equiv -4 \equiv +1 \pmod 5$.

Zato je $10^{\frac{p-1}{24}} \equiv 1 \bmod 11689$ ili $10^{487} \equiv 1 \pmod{11689}$. Broj 487 je prost i dužina je perioda razlomka s nazivnikom 11689 jednaka 487.

3. *Određivanje dužine perioda s pomoću tablica indeksa*

Neka je b primitivni korijen prostog broja p t. j. takav, da je tek $b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, i ako je a povoljni broj, koji nije djeljiv s p, tad postoji eksponent α takav, da je $b^\alpha \equiv a \pmod p$. Broj α se zove indeks od a u sistemu indeksa baze b i modula p. Tako je na pr. 2 primitivni korijen broja 13, te je $2^9 \equiv 5 \pmod{13}$, 9 je indeks od 5 u sistemu indeksa baze 2 i modula 13.

Budući da je $b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, izlazi, da je i $b^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$ i također $b^{\alpha + k(p-1)} \equiv 1 \pmod p$. Odatle izlazi, da se svaki broj, koji je kongruentan broju α modulo $p - 1$ može označiti kao indeks broja a. Tako su na pr. indeksi od 5 glede baze 2 i modula 13 ovi brojevi: 9, 21, 33 ...

Za indekse vrijede analogni poučci kao i za logaritme. Napose je $ind\, a^n \equiv n\, ind\, a \pmod{p-1}$.

Pomoću tablica indeksa može se dužina perioda nekog razlomka odrediti najbrže: Primjer 1. Kolika je dužina perioda razlomka s nazivnikom 2161?

Treba znati jedan od primitivnih korijena broja 2161. U tu svrhu pogledajmo u tablice indeksa[5]), gdje su indeksi svih prostih brojeva od 1 do 100 za module od 1 do 10000 i jedan od primitivnih korijena tih modula. Nalazimo, da je za modul 2161 jedan od primitivnih korijena 23. Da se u tim tablicama uzmogne naći indeks od 10, treba naći indeks od 2 i indeks od 5. Iz tih tablica zaključujemo:

$23^{998} \equiv 2$ (mod 2161), $23^{2098} \equiv 5$ (mod 2161). Dakle je $23^{3096} \equiv 10$ (mod 2161) ili jer je $23^{2160} \equiv 1$ (mod 2161), to je $23^{936} \equiv 10$ (mod 2161). Potencirajmo tu kongruenciju s x; imamo $23^{936x} \equiv 10^x$ (mod 2161). Kako x mora biti takovo, da je $10^x \equiv 1$ (mod 2161) to je $23^{936x} \equiv 1$ (mod 2161). Odatle izlazi

$936^x \equiv 0$ (mod 2160). Skratimo tu kongruenciju sa 72, imamo $13x \equiv 0$ (mod 30), najmanji pozitivni broj, koji toj kongruenciji zadovoljava, je 30. Dakle je dužina perioda razlomka s nazivnikom 2161 jednaka 30.

Vidimo, da se pomoću tablica indeksa mogu najlakše izračunati dužine perioda.

(Primljeno 14. XII. 1950.)

Literatura:

[1] *Gauss-Maser*, Untersuchungen über die höhere Algebra, Berlin 1889;
[2] *Färber*, Grundlehren der Mathematik, Arithmetik, Leipzig 1911;
[3] *Bork*, Die periodischen Dezimalbrüche, Berlin 1895.

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DE PÉRIODE D'UNE FRACTION

Stjepan Škreblin, Zagreb

Résumé

C'est l'abrégé d'une conférence faite à l'une des réunions mensuelles des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Il s'agissait de montrer comment on détermine la longueur de période d'une fraction $\frac{b}{n}$ où b et n sont premiers entre eux et où n ne contient pas de facteurs de la base 10. On trouve que la longueur cherchée est égale au »gaussien de n« c'est-à-dire à l'exposant t de la plus petite puissance de 10 congrue à 1 pour le module n.

On montre aussi que la tâche proposée est parfois allégée grâce aux recherches de Gauss et de Jacobi sur les restes quadratiques, cubiques, biquadratiques, bibiquadratiques.

On montre, enfin, comment on calcule la longueur de période d'une fraction $\frac{b}{n}$ en se servant des tables des indices.

---

[5]) Kraïtchik, Recherches sur la théorie des nombres.

DVOSTRUKI BETA-RASPAD

Gaja Alaga, Zagreb

Običnim beta-radioaktivnim raspadom nazivamo spontanu emisiju elektrona i neutrina ili pozitrona i neutrina iz atomnih jezgri. Sklone beta-raspadu bit će svakako jezgre, koje imaju višak neutrona ili protona i manju energiju spajanja (To je energija, koja se oslobađa pri stvaranju jezgre iz protona i neutrona. Ona mjeri stabilnost jezgre.) od jezgri, na koje se raspadaju. Budući da se kod običnog beta-procesa mijenja samo redni broj za ± 1, a atomni broj (ukupni broj protona i neutrona) ostaje isti, zovemo beta-radioaktivno raspadanje još i izobarnim prijelazom. Ako pogledamo na tablicu izotopa[1]), vidjet ćemo, da su na njoj česti t. zv. izobarni tripleti (tri jezgre istog atomnog broja) oblika Kr^{88}--Rb^{88}--Sr^{88}, Sn^{124}--Sb^{124}--Te^{124}, Te^{130}--I^{130}--Xe^{130}, U^{238}--Np^{238}--Pu^{238} ... i t. d. Posljednja tri izobarna tripleta razlikuju se od prvoga uglavnom po tome, što počinju stabilnim jezgrama obzirom na beta raspad. Uzrok je tome svakako, što je kod prvog slučaja energija spajanja srednje jezgre manja od energije spajanja početne jezgre, tako da raspad $Kr^{88} \rightarrow Sr^{88}$ može uslijediti preko Rb^{88} u obliku dva uzastopna obična beta procesa. Kod ostala tri izobarna tripleta to nije ispunjeno i zato se vjerovalo, da su Sn^{124}, Te^{130} i U^{238} stabilni obzirom na beta raspad. Firemanu[1] je, izgleda, prvom uspjelo pokazati (1949), da Sn^{124} nije stabilan, nego se raspada na Te^{124} direktno uz istodobnu emisiju dvaju elektrona. Nešto kasnije polazi za rukom Inghramu[2] i Seaborgu[3] isto pokazati i za Te^{130} i U^{238}. Takav proces, kod koga se Z mijenja za ± 2 nazivamo dvostrukim beta-raspadom. Polovično trajanje ovakvih jezgri znatno je duže od običnih radioaktivnih jezgri (po prilici 10^{18} godina). Svakako u tome leži razlog, zašto dvostruki beta-raspad nisu otkrili ranije.

Pitanje je, što je kod dvostrukog beta-procesa sa neutrinima. Da li se emitiraju i dva neutrina ili ne? Fireman iz svojih mjerenja (uspoređujući mjereno polovično trajanje $(4-5) \times 10^{15}$ godina sa računatim) zaključuje, da se neutrini ne emitiraju! Rezultati Inghrama i Seaborga ($1{,}4 \times 10^{21}$ i 6×10^{18} god.) su, međutim, u skladu sa emisijom dvaju neutrina. Premda se metoda mjerenja Inghrama i Seaborga (kemijsko određivanje količine Xe^{130} i Pu^{238} u geološkom Bi_2Te_3 i 6 godina starom čistom UO_3) s obzirom na Firemanovu (veoma teška mjerenja sa brojačima na koincidenciju) čini točnijom, ipak na temelju ovih nekoliko rezultata ne možemo ništa pouzdanoga reći o dvostrukom beta-raspadu.

Već davno prije otkrića dvostrukog beta-raspada M. Goeppert-Mayer[4] i Furry[5] izračunali su na temelju Fermijeve teorije[6] beta-radioaktivnog raspadanja vjerojatnost toga procesa. Mayer uzima, da je neutrino Fermi-Diracova čestica. Neutrino i antineutrino razlikuju se u tom slučaju po suprotno orijentiranim magnetskim momentima s obzirom na smjer spina. (Preko magnetskog momenta postoji dakle uzajamno djelovanje neutrinskog i elektromagnetskog polja.) Istodobna pretvorba dvaju jezgrinih neutrona u protone (ili obratno) praćena je tada emisijom dvaju elektrona (pozitrona) i neutrina (antineutrina). (To je t. zv. dvostepeni proces drugom aproksimacijom računa smetnje.) Polovično trajanje za Te^{130} iznosi po prilici 6×10^{24} god. Furry u svojim računima polazi od Majoranine[7] teorije neutralne čestice (neutrina), t. j. od pretpostavke da neutrino nema nikakvog uzajamnog djelovanja sa elektromagnetskim poljem. Neutrino se u tom slučaju ne razlikuje od antineutrina, pa dvostepeni proces prema Furryu teče ovako: U prvom koraku se pretvara jedan od jezgrinih neutrona u proton uz emisiju elektrona i neutrina (obični beta-raspad) i tako nastaje virtuelno međustanje. Emitirani neutrino umjesto da napusti jezgru može biti u drugom koraku apsorbiran od jednog jezgrinog neutrona uz emisiju

[1]) Supek: Teorijska fizika i struktura materije, Zagreb 1949., str. 666.

elektrona. Konačan rezultat je istodobna pretvorba dvaju neutrona u protone uz emisiju dvaju elektrona, bez emisije neutrina. Polovično trajanje ovakvog procesa za Te^{130} bilo bi po prilici $6 \cdot 10^{[illegible]}$ god.

Mjerenja srednjeg trajanja dvostrukog beta-raspada mogu baciti prema tome novo svijetlo na svojstva samoga neutrina. Ona mogu odlučiti o tome, da li neutrino stoji u uzajamnom djelovanju s elektromagnetskim poljem, t. j. da li ima ili nema magnetskog momenta, dakle da li je on čestica Fermi-Diracovog ili Majoraninog tipa.

Literatura:

[1] E. L. Fireman, Phys. Rev., 75, 323 (1949); [2] M. G. Inghram–J. H. Reynolds, Phys. Rev., 76, 1265 (1949); 78, 822 (1950); [3] C. A. Levine–A. Ghiorso–G. T. Seaborg, Phys. Rev., 77, 296 (1950); [4] M. G. Mayer, Phys. Rev., 48, 512 (1935); [5] W. H. Furry, Phys. Rev., 56, 1184 (1939); [6] E. Fermi, Zs. f. Phys., 88, 161 (1934); [7] E. Majorana, Nuovo Cimento **14**, 171 (1937).

Bibliografija

Dr. Đuro Kurepa

TEORIJA SKUPOVA

Zagreb, Školska knjiga, 1951, XIX+439 str.

»Školska knjiga« izdala je u svojoj zbirci visokoškolskih izdanja djelo prof. Kurepe pod navedenim naslovom, o kome treba da se u »Glasniku« nešto kaže prema značenju tog djela u našoj matematičkoj literaturi. Evo u glavnim crtama sadržaja tog djela.

Prvi dio ima tri glave. Glava prva uvodi osnovne pojmove teorije skupova i osnovne operacije, kao što su prijelaz na partitivni skupove, udruživanje i oduzimanje skupova, pa presjek skupova. Dalje se prelazi na pojam preslikavanja ili funkcije, koji u tom djelu ima ono osobito mjesto, koje mu pripada po važnosti njegove uloge u najrazličnijim granama matematike. Glava druga posvećena je obostrano jednoznačnim preslikavanjima skupova ili, što je isto, kardinalnim brojevima. S tog se gledišta izgrađuje teorija tih brojeva, konačnih i beskonačnih, dakle prirodnih brojeva i transfinitnih kardinalnih brojeva, i sa stanovišta teorije skupova strogo utvrđuju pravila za računanje s njima. Pri tome je princip totalne indukcije predočen u svjetlu njegova značenja u teoriji prirodnih brojeva. Od kardinalnih se brojeva raspravlja napose o dva važna: alef-nuli i kardinalnom broju skupa svih realnih brojeva. Glava treća radi o uređenosti skupova i ordinalnim brojevima. Pošto je definirana djelomična uređenost skupa spomoću relacije ekvivalencije i uređajnosti, ističe se važnost pojma komada uređena skupa i tada na osnovu pojma reza promatraju svojstva skupa svih realnih brojeva, kao i kompleksnih. Pojam sličnosti uređenih skupova jedan je od osnovnih, jer vodi do ordinalnih brojeva konačnih i beskonačnih. Diskusija poređajne karakteristike linearnog kontinuuma vodi do formulacije Suslinova problema, kojim se autor, kako je poznato, intenzivno bavi. Dobro uređeni skupovi i princip transfinitne indukcije prilaz su do onog osobito važnog poopćenja običnog brojanja do beskonačnog transfinitnog brojanja i beskonačnih rednih brojeva. Njihovim svojstvima, kao i pravilima za računanje s njima, pa inicijalnim rednim brojevima posvećeno je dosta prostora. U vezi s problemom prebrajanja istaknuta je i važna zadaća Zermelova aksioma i njegovih posljedica. Dalja razmatranja posvećena su djelomično uređenim skupovima. Uz definicije specifične za te skupove, kao na primjer definicija filtra, uvodi se odmah važna kategorija razvrstanih skupova ili rodoslovlja, daju se pojmovi početnog sloja i sloja uopće, te ranga i jezgre takvih skupova zajedno s njihovim svojstvima. Ta je teorija opširno i sustavno izložena u tom djelu i čini jednu od njegovih osobitosti. Posebni paragraf radi o Suslinovu problemu, potanko se ispituju razni pogledi na

taj problem, napose nužni i dovoljni uvjeti za pozitivnost odgovora na pitanje postavljeno tim problemom. Dalje je poglavlje posvećeno Cantorovu problemu ili hipotezi kontinuuma, i opet u vezi s razvrstanim skupovima, za koje autor lijepo pokazuje, kako su upravo oni prirodan aparat za izučavanje Cantorova problema. Prijelazom na mrežaste skupove (lattices) razlaže autor jednu teoriju, koja je sustavno izrađena tek u najnovije vrijeme, premda i Booleova algebra logike i Dedekindova teorija ideala pripadaju u tu vrstu skupova. Iz mnoštva gledišta, kako se mogu promatrati djelimično uređeni skupovi, u tom se djelu ističe još jedna vrsta preslikavanja, a to je monotono preslikavanje djelimično uređenih skupova na djelimično uređen skup. Vrši li se preslikavanje na skup realnih brojeva, dolazi se do monotonih realnih funkcija s argumentom, koji je član bilo koga djelimično uređenog skupa, a s realnim funkcijama u razvrstano uređenim skupovima u vezi je i Suslinov problem.

D r u g i d i o ima tri glave. Glava četvrta radi o prostornim skupovima. Pošto je dao opću definiciju, prelazi autor na diskusiju pojedinih važnih kategorija prostora: razdaljinskih, polurazdaljinskih, uređenih, topologijskih i uniformnih prostora. Najprije se iznose karakteristična svojstva razdaljinskih prostora, u kojima se uvode pojmovi konvergencije i divergencije slijedova, s posljedicama, koje iz tog izlaze. U vezi s općim prostorima uvodi autor najprije pojam prostornosti, pa dalje važne pojmove vanjštine, nutrinje i omeđenja skupa, kao i teoreme, koji te pojmove vežu. Isto tako uvodi i upotrebljava pojmove gomilišta i derivata skupa te napose važan pojam separabilnosti. U daljem toku prelazi se na Fréchetove okolinske skupove, koji obuhvataju i topologijske prostore Kuratowskoga, kao i uniformne prostore. Jasno se iznosi važnost pojma okoline i diskutiraju Hausdorffovi aksiomi. Dalja se razmatranja bave svojstvima osobito važnih kategorija skupova, otvorenih i zatvorenih skupova te neprekidnog preslikavanja. Pri diskusiji topologijskih i uniformnih prostora vidi se važnost pojma filtra, kao i topologijske grupe. Glava peta donosi dalje važne pojmove prostornih skupova: vezanost, potpunost, kompaktnost i bikompaktnost. Njihove teorije bacaju posebno svijetlo na užu teoriju realnih funkcija jedne realne promjenljive, napose i realnih brojeva. Zatim se u novom svijetlu izlaže teorija Borel-Lebesgueova o prekrivanju skupova i teoremima, koji iz toga izlaze. Predmet završne šeste glave Borelovi su skupovi, a zatim Suslinovi, koji su predmet današnjeg živog istraživanja, čime autor ulazi u najnoviju problematiku te teorije. Poglavlje o mjeri završava drugi dio.

To bi bio kratak sadržaj tog građom bogatog i mnogostranog djela; ono predočuje u pojedinostima i do krajnjih posljedica promišljenu i sređenu modernu teoriju skupova s osobitim isticanjem onih dijelova, na kojima je autor s toliko uspjeha radio i dao bitno novih i osnovnih doprinosa. Što se tiče načina izlaganja i dokazivanja, odlikuje se djelo kratkim, konciznim postupcima, koji ravno vode u bitnost pitanja ili izvoda; ako ima i dugih izvoda, to je prirodno u teorijama, koje su još u izgrađivanju. Mnoštvo primjera, pomno probranih i pripremljenih, pomoći će razumijevanju autorovih razlaganja, kao što i grafička predočivanja odnosa. Popis literature, dobro kazalo, koje za svaki upotrebljeni pojam i naziv donosi prijevod u ruskom, engleskom, francuskom i njemačkom jeziku, doprinose kvaliteti djela, a decimalno označivanje građe i formula pomoći će u snalaženju u velikom broju pojmova i izvoda. Za razumijevanje djelo ne traži mnogo konkretnog matematičkog predznanja, ali tu će knjigu moći s korišću čitati tek čitaoci sa znatnom sposobnošću apstraktnog mišljenja. No za njih će ona biti vrlo koristan vodič prema novim istraživanjima u tom području, jer duh, kojim to djelo diše, živi je duh matematičkog stvaranja, pa po toj svojoj oznaci može da znači početak nove etape matematičkih istraživanja u nas u području teorije skupova.

Dr. Željko Marković

Biografija

Đuro Kurepa

DR. ING. DRAGOLJUB MILOSAVLJEVIĆ

16. II. 1906. — 1. VIII. 1950.

In memoriam!

Dr. ing. Dragoljub Milosavljević

Upoznao sam ga jeseni 1933. u Parizu, kamo je bio došao na specijalizaciju iz fizike, nakon što je u Beogradu diplomirao: 1931. strojarstvo na Tehničkom fakultetu, a 1932. teorijsku matematiku sa teorijskom fizikom na Filozofskom fakultetu. Naredne dvije godine, a napose 1935. dosta smo se družili, pa sam mogao vidjeti duševno raspoloženje i rad toga robusnog sina šumadijskog sela (rođen je 16. II. 1906. u Desimirovcu, kraj Kragujevca). Vidio sam koliko je ispočetka bio u neprilici u izboru predmeta za istraživanje, pa mi je bilo osobito zadovoljstvo, kad sam ga doveo našem zemljaku Dru Ing. Ml. Paiću, da o ultrazvučnim pojavama radi pod njegovim vodstvom u Fizičkom laboratoriju što ga je Dr Paić tada vodio u Institutu Fournier. I koliko mi je bilo drago, kad je jednog dana, ljeti 1935., došao s riječima: »Pođe mi za rukom da komad čelika stavim u vibriranje«. I taj krupni čovjek koji se inače niti fizički niti misaono nije žurio, reče, da će stvar odmah i objaviti. Ali, osvajanje novih predjela u nauci i dolazak do novih pronalazaka ipak ide znatno teže; čovjek ima da više puta prijeđe iz stanja oduševljenja u stanje sumnje i kritičnosti i obrnuto: za nekoliko dana uvjerio se je Dragoljub, da stvar nije uspjela, pa se koncem istog mjeseca, ne probivši leda na ispitivanom terenu, povratio na ljetne praznike u Jugoslaviju.

Posljednji sam ga put vidio koncem 1949., kad sam u Beogradu držao nekoliko stručnih predavanja. Pred ručak, u njegovoj kući, razgovarajući se među ostalim o nauci uopće, i kod nas napose, reče on u šali: »Ti sa svojim skupovima putuješ... Da ja rešim pitanje o svojoj jednačini stanja, projahao bih ja na njoj po univerzitetima«. Govorio mi je i o svojoj nedavnoj bolesti; zbog slabe ishrane za vrijeme rata, kad niti on niti žena mu nisu bili namješteni (za vrijeme rata umrla mu je i majka Gvozdenija, a otac Marko ubijen), kao uopće zbog materijalne oskudice, koja ga je pratila i za vrijeme đačkog i studentskog života, dobio je 1944. tuberkulozno oboljenje šarenice (irisa) na lijevom oku, pa su ga vlasti poslale 1946. na uspješno liječenje u Davos (Švicarska).

Kad sam se krajem prvog mjeseca ove godine vratio iz inozemstva, našao sam pismo Dragoljubove žene i .... njegovu osmrtnicu. Preneražio sam se! Teško mi je bilo povjerovati! Umro je Dragoljub i to još 1. VIII. 1950., u Ivanjici! Toga snažnog Šumadinca skrhala je tako potajna i rijetka bolest: hemoragična dijateza s izlivom u mozak. Već ga dakle pola godine nije bilo! I dozvah si u pamet njegov životni put.

Od rodnog mu sela Desimirovca kraj Kragujevca, bjegstvo od kuće u grad u školu, koju je svršavao radeći i teške fizičke poslove i podučavajući drugove. I taj najbolji srednjoškolac, »Zevs«, kako ga zvahu, maturira s odličnim uspjehom u Kragujevcu 1926., završava u Beogradu strojarstvo na Tehnici 1931. s odličnim uspjehom, a teorijsku matematiku s fizikom na Filozofskom fakultetu 1932. god. s vrlo dobrim uspjehom, u Parizu od 1933—1936. studira fiziku, pa 1936. na Sorbonni postaje doktorom fizičkih nauka; suplent gimnazije u Beogradu 1933., odmah zatim asistent, a 1937. i docent na katedri Termodinamika na Tehničkom fakultetu u Beogradu; 1948. vanredni profesor i šef katedre za fiziku Tehničke visoke škole u Beogradu, a 1950. . . . smrt. Smrt prekinu naučni rad i dalji uspon tog realnog čovjeka u najboljim njegovim stvaralačkim godinama! Koliko li je strašno pomisliti, da je time prerano spriječeno iskorištavanje neizmjernog napora i truda i samopregaranja što ih je taj čovjek uložio, da se sam školuje, sam uzdiže i uprkos mnogih prepreka popne na stepen sveučilišnog profesora i šefa tako važne katedre, kao što je katedra fizike na Tehničkom fakultetu. Upravo, kad je mogao misliti, da su mu osigurani uslovi za plodan naučni i nastavnički rad: žena saradnica, položaj na fakultetu i nauci, i eto tada nastupi katastrofa! Koliko li je u tim slučajevima udarac za svojtu veći, kad je pokojnik sam, tako reći iznenada i nepredviđeno, izrastao do tih visina! Za zajednicu gubitak je znatan, jer je Dragoljub Milosavljević bio fizičar, solidne matematičke i tehničke naobrazbe, a takvih malo imamo.

Pokojni Dragoljub Milosavljević ostat će svjetlim primjerom radinosti i predanosti poslu. Već kao student počeo je da piše i izdaje (isp. radove [1] — [6] popisa B). Bavio se pitanjima iz mehanike i fizike. Počeo je s elektronikom, pa je iz toga područja i doktorirao (isp. [1] — [3] popisa A); napustivši to divno područje stao je tražiti matematički obrazac, jednadžbu stanja materije, da opiše zavisnost između pritiska p, volumena v i temperature T, što ih pokazuje neko ne idealno, nego realno tijelo, pa u kakvom se god agregatnom stanju ono nalazilo (isp. radove [4], [5], [12]—[14], [20], [22], [23] popisa A). Jer, poznato je, da je Van der Waalsova jednadžba stanja tek prvi nepotpun korak u tom pogledu. I prelazio je s jednog oblika jednadžbe na drugi, vođen mišlju, da veličine koje ulaze u jednadžbu budu imale svoje realno fizičko značenje, pa je došao do zaključka[1]), da će do željenog cilja doći vjerojatno lakše upotrebom ne samo algebarskih funkcija, kao što su to radili Van der Waals i njegovi sljedbenici, nego i transcedentnih funkcija, a specijalno upotrebom prirodne eksponencijalne funkcije. Ovu

---

[1]) U svojoj knjizi »Fizika I«, Beograd 1948. na str. 214/15, piše Milosavljević među ostalim:

». . . . dobiva se Van der Valsova jednačina tečnog i gasovitog tela:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\;(v - b) = rT.$$

Van-der-Valsova jednačina samo kvalitativno daje korisnu sliku menjanja veličina p, v, i T. Stoga su mnogi fizičari i inženjeri nastavili istraživanje jednačine, koja će biti tačnija od Van-der-Valsove. Broj predloženih jednačina penje se na stotinu. Sve ove jednačine pretstavljaju uopštavanje Van-der-Valsovih ideja, a ne uvođenje novih principa. Problem istraživanja karakteristične jednačine uglavnom je ostao nerešen.

U cilju istraživanja karakteristične jednačine pisac ove knjige učinio je sasvim nove hipoteze. Prvo, jednačina sadrži, pored promenljivih veličina pritiska, zapremine i temperature, konstantne veličine, koje imaju potpuno određeno fizičko značenje. To su gasna konstanta r

je Dragoljub Milosavljević uzeo kao osnovni element u izgradnji svoje jednačine stanja; tome stubu dodavao je razne privjeske, konstante i parametre, ponekad i takove, kojima odmah nije umio dati pravo fizičko značenje (tako u jednom od posljednjih radova ulazi još neprotumačen jedan parametar). Opsjednut traženjem jednadžbi i provjeravanjem svakog nađenog oblika dugotrajnim izračunavanjem — u čemu mu je životna drugarica, profesor matematike Ljubica rođ. Perić, toliko koristila — na samrti izgovara riječi: »Ljubice, ne zaboravi šiber i jednačinu« — posljednji odraz i svijesne i nesvijesne aktivnosti tog našeg skromnog naučenjaka, kojeg tako rano izgubismo.

Radovi prof. Milosavljevića

A) Naučni članci:

1. Sur la détection du courant de haute fréquence (Comptes Rendus, Paris, 202 p. 172, 1936).
2. Sur l'emploi du tube éléctronique comme détecteur (Ibidem, p. 472).
3. Sur la résonance de tension d'un circuit oscillant (doktorska teza, Paris, 1936.).
4. Van der Waalsova i Clausiusova jednačina stanja materije, (Glasnik Hemiskog društva, Beograd, knj. 7, str. 79—85 (1936)).
5. O jednačini stanja stvarnih gasova (Ibid. 87—90).
6. Oscilacije matematičkog klatna sa proizvoljnom amplitudom (Godišnjak Tehn. fakulteta, Beograd, 1937).
7. O definiciji temperature (Glasnik Hemiskog društva, Beograd, 9, 61—64 (1938). Pristupno predavanje na Tehn. fak. 3. XI. 1937. u Beogradu).
8. (Sa M. Jovanovićem) Primena B. Majerove metode za određivanje molekularne težine na niskom pritisku (Glasnik Hem. društva, Beograd, 10, 57—62 (1939)).
9. Jednačina promene stanja pri adijabatskom isticanju (Saopštenje maš. i vazd. grupe Tehn. fak., Beograd 1940).
10. Contribution à l'étude de rechauffage de l'eau d'alimentation des chaudières au moyen de vapeur extraite de la turbine (Publications de l'Institut mathématique, Beograd, 1, 114—120 (1947)).
11. Détermination de la liaison entre la pression et la température correspondante (C. R., Paris, 224, p. 1345, 1947).

---

i pritisak p_k, specifična zapremina v_k i apsolutna temperatura T_k kritične tačke kao i pritisak $p_{k'}$, specifična zapremina $v_{k'}$ i apsolutna temperatura $T_{k'}$ trojne tačke. Drugo, pojedini članovi karakteristične jednačine nemaju dimenzija. Treće, tražena jednačina nije algebarskog tipa Van-der-Valsove jednačine, već u njoj glavnu ulogu igra prirodna funkcija e^x. Na osnovu ovih pretpostavki dobivena je sledeća karakteristična jednačina:

$$\frac{rT}{pv} = e^{\left(1-\frac{pv}{rT}\right)\left[1+\frac{v_k}{v}\cdot\varphi(T)\right]}.$$

gde je: $$\varphi(T) = \frac{T_k}{T} - \left(1 - \frac{T_{k'}}{T}\right)\cdot e^{-\left(1-\frac{T_{k'}}{T}\right)}.$$

Ova jednačina može se primeniti za sva ona stanja stvarnih gasova kod kojih je $p \leq p_k$".

12. Remarques au sujet de l'équation d'état de fluides (C. R. Paris, 225, p. 671, 1947).
13. Contribution à la recherche de l'équation d'état des fluides (C. R., Paris, 225, p. 1288, 1947).
14. Istraživanje jednačine stanja materije (Glasnik Hemijskog društva, Beograd, knj. 12, p. 221—240, 1947).
15. Prilog određivanja frekvencije transverzalnih oscilacija po Releovoj metodi (Godišnjak Teh. fak. Beograd, 1946-47).
16. Contribution à l'étude de l'écoulement des gaz (Publ. Inst. Math. Beograd, 2, p. 205—210, 1948).
17. Détermination du point critique (Ibidem, 243—247).
18. Pritisak zasićene pare (Glasnik Hemijskog društva, Beograd, 14, p. 13—26, 1949).
19. Određivanje toplote isparavanja (Ibidem, 27—32).
20. Prilog istraživanju jednačine stanja materije (Ibidem, 81—91).
21. Skretanje tela ka istoku pri slobodnom padanju (Vesnik Društva matematičara i fizičara N. R. Srbije, Beograd, br. 1, p. 63—69, 1949).
22. (sa Ljubicom Milosavljevićevom) Unutrašnji pritisak kod tečnosti i gasova (Glasnik Hemijskog društva, Beograd, 15, p. 69—80. 1950).
23. Jednačina stanja materije Dragoljuba Milosavljevića. (Ibidem, 143—146) (posmrtno; izdala Ljubica Milosavljević).

B) Udžbenici i skripta

1. Osnovi elektrotehnike (po predavanjima prof. P. Miljanića, Beograd, 1930).
2. Sistemi mera u elektrotehnici, 1930. (kao cand. ing.; skripta).
3. Analitička geometrija, Beograd, 1931.
4. Zbirka rešenih ispitnih zadataka Primene određenog integrala, Beograd.
5. Otpornost materijala, momenti ravnih preseka, 1932.
6. Tehnička mehanika, kinematika tačke, 1932.
7. Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz diferencijalne geometrije u ravni, drugo izdanje, 1933.
8. Analitička geometrija za srednje škole, Beograd, 1939.
9. Osnovi mašinstva i elektrotehnike, Beograd, 1946.
10. Fizika I; Mehanika, Toplota, Beograd, 1948.
11. Fizika II; Geometriska optika, Elektricitet, Beograd 1947_2, 1951_3, 328 str.
12. Rešeni problemi iz fizike, Beograd, 1949_3 (u zajednici sa asistentom B. Milovanovićem).

Osim gornjih radova objavio je Milosavljević nekoliko manje više popularnih članaka iz fizike (5 u Nauka i Tehnika, a po 1 u Nauka i Priroda, te Tehnika narodu); osim toga, ostavio je raznih drugih, što završenih, što nezavršenih radova.

ODRŽANI KOLOKVIJI

22) 6. VI. 1951. *Prof. R. Vernić:*

Uniformizacija problema triju tijela

Nadovezujući na kolokvij od 4. X. 1950. predavač je prikazao osnovne točke svojih istraživanja u problemu sudara triju tijela. Prilikom objašnjenja nekih pogrešnih zaključaka nastavljača radova K. F. Sundmana, napose D. Belorizkog, koji su priječili proširenje Sundmanovih rezultata na opći sudar triju tijela, izvedeni su i novi teoremi o problemu dvaju tijela u kompleksnom području, analitički i projektivno-sintetički. Sustavnim razmatranjem veličinâ i funkcijâ tog problema u kompleksnom području dobiven je eksplicitni izraz za novu vrst višeznačnih transcendenata t. zv. algebromorfne funkcije, u koje spada opće rješenje problema u Sundmanovu smislu. Taj je izraz u skladu s istraživanjima Mittag-Lefflera o prikazivanju višeznačnih funkcija jednim beskonačnim procesom u t. zv. zvijezdi. Najzad je provedena eksplicitna uniformizacija tih specijalnih algebromorfnih funkcija, što predočuje osnovnu ideju istraživanja, a i pravu suštinu metode regularizacije problema triju tijela. Konačno dobivena opća relacija je prikladno poopćenje jedne Bohlinove relacije iz 1911., i ona može poslužiti kao ishodište za numeričko aproksimativno tretiranje tog problema u općem slučaju.

23) 13. VI. 1951. *Dr. F. I. Havliček:*

O projektiranju neutronskih reaktora

Predavač je razmatrao problem izgradnje nuklearnih reaktora i prikazao stanje tog problema prema podacima literature osvrnuvši se naročito na proračun reaktora tipa Haigerloch i Los Alamos. U daljnjem je razmatranju upotrijebio formulu za difuziju neutrona, u koju ulazi put difuzije, prosječni slobodni put neutrona, broj sudara neutrona jedne grupe sa jezgrama moderatora do apsorpcije, broj sudara neutrona između dva sudara sa teškim jezgrama i prosječni kosinus kuta promjene smjera kod sudara. Za vodu dobivena je Fermijeva površina $L_f^2 = 22{,}4$ i koeficijent apsorpcije $\sigma_t = 0{,}42 \pm 0{,}05$ te broj novih neutrona $\eta = 2{,}1 \pm 0{,}1$ kod jednog cijepanja U^{235}. (Vrijednost za η je identična sa onom, koja je naknadno objelodanjena u časopisu Nucleonics 8, str. 78, koja iznosi $2{,}5 \pm 0{,}1$. Podudaranje tih vrijednosti se postizava, ako uz presjek od 545 barnsa za cijepanje U^{235} uzimamo u obzir također novo objelodanjeni presjek apsorpcije od 100 barnsa, koji reducira vrijednost 2,5 za jednu šestinu.)

24) 3. X. 1951. *Ing. Z. Sternberg:*
Emisiona spektralna analiza elektrolitskih otopina

Prikazan je najprije kratki historijat spektralne analize otopina. Zatim je predavač iznio rezultate vlastitog rada na tom području. Stabiliziranjem otpora otopine i sprečavanjem elektrolitskog izlučivanja metala postignuta je dobra konstantnost spektralnog izvora. Točnost i brzina analize povećana je primjenom metode relativnih intenziteta u fotometriji. Pokazalo se, da se linije iz vrpčastog spektra OH-radikala mogu upotrebiti kao unutarnje standard linije. Saopćeni su rezultati ispitivanja utjecaja aniona na intenzitet spektralnih linija i dano je tumačenje za tu pojavu. Razmotrena je bila i primjenjivost opisane metode. U spektrima, uslijed niske temperature od cca 3500^0 C dolaze isključivo rezonantne linije, koje pri većim koncentracijama pokazuju reverziju. Radi ispitivanja pojave reverzije priređen je novi tip elektrode i saopćeni prvi rezultati rada s tom elektrodom.

25) 10. X. 1951. Stručno pedagoško veče:
Prof. G. Šindler — prof. E. Vernić:
Nastava elektromagnetskih valova u srednjoj školi

26) 17. X. 1951. *Prof. M. Sevdić: Izvođenje hiperboličnih funkcija na temelju binomskog poučka*

Pošavši od binomskog poučka definirane su dvije funkcije za cijele argumente (eksponente binoma), za koje vrijede adicioni teoremi, a uz uvjet da je razlika kvadrata tih funkcija jednaka jedan. Na osnovu adicionih teorema definirane su zatim funkcije za vrijednosti nulu i negativne cijele argumente i nađene formule za funkcije dvostrukog argumenta i relacije za pretvaranje sume i razlike funkcija u produkt. Dalje je izvedeno da funkcije vrijede i za svaki realni argument i pokazano, da su kontinuirane. Na osnovu jedne granične vrijednosti nađene su njihove derivacije, a na završetku je pokazana istovjetnost tih funkcija sa hiperboličnim sinusom i hiperboličnim kosinusom.

27) 24. X. 1951. *Prof. I. Smolec: Trajektorije jednostruko neizmjernih sistema ravnih krivulja*

U ravnom području D zadan je sistem K krivulja k. Ovom sistemu neka je pridružen sistem T krivulja t, tako da svakom točkom područja D prolazi po jedna krivulja iz K i T. Ako linijski elementi sistema K i njima pridruženi linijski elementi sistema T zadovoljavaju uvjetu U, koji je izražen nekom relacijom između linijskih elemenata obadvaju sistema, i to u svim točkama područja D, tada su krivulje t trajektorije sistema K. Prema tome kakav je U imamo razne vrste trajektorija. Ako je kut između krivulja k

i pridruženih krivulja t stalan, trajektorije nazivamo izogonalnim. Ako je omjer gradijenata tangenata krivulja k i t stalan, oba sistema imaju zajednički sistem izoklina. Ako je vrijednost tog omjera (—1), subtangente krivulja k i t su jednake i protivnog smjera. Predavač je obradio još nekoliko vrsta trajektorija te pokazao, kako se mogu na temelju odnosa između krivulja k i t konstruirati tangente raznih krivulja.

28) 31. X. 1951. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *V. Devidé:*
Osnivanje vektorske algebre na algebri kvaterniona,

b) *Prof. S. Škreblin: O funkciji* $\frac{\sin x}{x}$.

c) *Prof. R. Vernić: O Paschovom aksiomu.*

OSNIVANJE PODRUŽNICE DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE U SPLITU

Inicijativom matematičara i fizičara grada Splita, a naročito zalaganjem prof. I. Silobrčića i asist. E. Wagnera, stvoreni su uslovi za osnivanje podružnice Društva u tom našem starom kulturnom središtu. Upravni odbor Društva donio je na sjednici od 3. X. 1951. Odluku o osnivanju Podružnice u Splitu. Na osnivačkoj skupštini 27. IX. 1951. izabran je ovaj odbor podružnice: predsjednik Hruš Antun, prof. V. P. Š., tajnik Jurišić Dušan, prof., članovi odbora: prof. Đ. Katurić, prof. I. Silobrčić i nastavnik N. Mardešić. Podružnica je dosad okupila zaista znatan broj članova i to 53 (od toga 37 redovitih, 16 pomagača), a također započela s intenzivnim radom (prvo predavanje održano je 1. X. 1951.). Želja je svih matematičara i fizičara, da podružnica u Splitu, kao i one u Rijeci i Šibeniku, što više doprinese razvoju matematičko-fizičkih nauka, kao i da uzdigne nastavu iz tih predmeta. Matematičarima i fizičarima drugih većih mjesta neka ovo osnivanje bude pobudom da i oni pođu tim putem.

PRIMLJENE PUBLIKACIJE

Časopisi:

1. Acta Mathematica, B. 85, n. 3—4 (1951),
2. American Journal of Physics, V. 19, n. 6, 7 (1951), New York,
3. Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles, T. 65, n. 1—2 (1951),
4. Annales de l'Institut Fourier, T. II (1950), Grenoble,
5. Annales Françaises de Chronométrie, 2e série, T. V. n. 1, 2, T. VI,
6. Annales Universitatis M. Curie-Sklodowska, V. IV (1950), Lublin,
7. Annali di Geofisica, V. IV. n. 2 (1951), Roma,
8. Annals of Mathematics, V. 52, n. 1, 2, 3; V. 53, n. 1, 2, 3; V. 54, n. 1, 2 (1950/51),
9. Anzeiger (Österreichische Akademie der Wissenschaften), 1950 (1-15),
10. Archimedes, H. 4, 5 (1951),
11. Archives des Sciences, V. 4, f. 1 (1951), Genève,
12. Arkiv f. Fysik, Bd. 3, n. 1—3 (1951), Stockholm,

13. Arkiv f. Geofysik, Bd. 1, n. 2—4 (1951), Stockholm,
14. Arkiv f. Matematik, Bd. 1, n. 4, 5 (1951), Stockholm,
15. Astronomischer Jahresbericht, Bd. 46, Heidelberg,
16. Atti dell'Istituto Veneto, T. CVIII (1950),
17. Bollettino della Unione mat. italiana, n. 2, 3 (1951), Bologna,
18. Bulletin de la Soc. math. de France, T. LXXVIII f. 4 (1950),
19. Bulletin de la Soc. R. d. Sciences, n. 1—4 (1951), Liège,
20. Bulletin of Information, Columbia University, s. 51, n. 1.
21. Canadian Journal of Mathematics, V. III, n. 1, 2, 3 (1951), Toronto,
22. Ciencia, V. XI. n. 1—2, 3—4 (1951), Mexico.
23. Colloquium Mathematicum, II. 2 (1949), Wroclaw,
24. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 75, čis. 3—4, Praha,
25. Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, B. XXVI n. 8—12 (1951),
26. Duke Mathematical Journal, V. 18, n. 1, 2, 3 (1951), Durham,
27. Elementa, årg. 34:1, 34:2, 34:3 (1951), Stockholm,
28. Gazeta de Matematica, ano XII, n. 47, 48 (1951), Lisboa,
29. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 55, H. 1 (1951), Bielefeld,
30. Japanese Journal of Mathematics, V. XX (1950), Tokyo,
31. Journal of the British Interplanetary Society, V. 10, n. 4, 5 (1951), London,
32. Journal of the Franklin Institute, september 1951,
33. Journal of the Math. Society of Japan, V. 2, n. 3—4 (1951), Tokyo,
34. La Ricerca Scientifica n. 1—9 (1951), Roma,
35. Mathematicae Notae, año IX, f. 1—2, 3, 4 (1949), año X (1950), Rosario,
36. Matematisk Tidskrift, H. 1—2 (1951), København,
37. Mathematical Reviews, V. 12, n. 3—8 (1951),
38. Mathematical Tables and other Aids to Computation, V., n. 35 (1951), Washington,
39. Mathesis, T. LX, n. 3—4, 5—6 (1951), Mons,
40. Norsk Matematisk, Tidsskrift, årg. 33, H. 2 (1951), Oslo,
41. Obzornik za mat. in fiz. n. 2, 3 (1951), Ljubljana,
42. Portugaliae Mathematica, V. 10, f. 1 (1951),
43. Procès-Verbaux des séances, Com. Int. des poids et mesures, 2e série, T. XXII (1950), Paris,
44. Progress of Theoretical Physics, V. 1, n. 1—4 (1946), V. 2, n. 1—4 (1947), V. 3, n. 3—4 (1948), V. 4, n. 1—4 (1949), V. 5, n. 1—6 (1950), V. 6, n. 1—3 (1951), Kyoto,
45. Razprave, Sl. Akad. znanosti in umetnosti, II (1951), Ljubljana,
46. Rendiconti del Seminario mat. di Padova, anno XX (1951),
47. Revista, ser. A, V. 7, n. 2 (1950), Tucumán,
48. Revue de la Fac. des Sciences de l'Univ. Istanbul, T. XVI, f. 1, 2 (1951),
49. Simon Stevin, n. 1—2 (1950/51), Gent,
50. The Mathematical Gazette, V. 35, n. 312 (1951), London,
51. Tohoku Mathematical Journal, 1 (1) (1949), 1 (2), 1 (3) (1950), 2 (1), 2 (2) (1950), 3 (1) (1951), Sendai,
52. Veröffentlichungen des Meteor. Dientes der D. D. R. n. 4 (1951),
53. Vesnik Društva mat. i fiz. N. R. Srbije, T. II, n. 3—4 (1950), Beograd,
54. Zeitschrift f. Physik, Bd. 129, H. 4, 5, 6 (1951), Bd. 130, H. 1, 2, 3 (1951),

Knjige:

1. Almanah Bošković 1951, Zagreb.
2. VI Zjazd Matematyków Polskich, Kraków,
3. Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, Toronto.

RJEŠENJA ZADATAKA 122, 132, 149*

122. Atomnu jezgru s velikom atomnom težinom možemo predočiti kao kuglu, u kojoj su jednoliko raspoređeni protoni i neutroni. Pokaži, da prosječna vrijednost Coulombove potencijalne energije jednog protona (naboj e) u takvoj atomnoj jezgri (redni broj Z, polumjer R), s obzirom na sve ostale protone jezgre, iznosi:

$$E_{pot} = (Z-1)\,\frac{6}{5}\,\frac{e^2}{R}\,.$$

Zadatak s rješenjem dostavio D. Mayer, Zagreb, riješili su ga D. Jurišić, Zagreb, S. Mardešić, Zagreb, I. Babić-Gjalski, Zagreb i D. Gospodnetić, Zagreb.

D. Jurišić najprije izračunava ukupnu električnu energiju naboja $Z\,e$, koji je jednolniko raspoređen u volumenu kugle polumjera R i dolazi na poznati izraz[1])

$$U_z = \frac{3}{5}\,\frac{Z^2 e^2}{R}\,.$$

Sada treba iz tog izraza za energiju, koji sadrži i Maxwellove »vlastite energije« protona i Coulombove potencijalne energije, izlučiti samo ove posljednje.

Prvo ćemo naći međusobnu energiju dvaju naboja u toj kugli. Dakle uzimamo $Z = 2$, a kako želimo baš Coulombovu energiju, to od U_2 moramo odbiti dvije »vlastite energije«. Ista se dobije kad se u izrazu za energiju U_z stavi $Z = 1$. Dakle međusobna energija dvaju protona u jezgri je

$$U = \frac{12}{5}\,\frac{e^2}{R} - 2\cdot\frac{3}{5}\,\frac{e^2}{R} = \frac{6}{5}\,\frac{e^2}{R}\,.$$

To je energija jednoga protona zbog drugoga, a budući da na jedan proton djeluje $(Z-1)$ protona, to je Coulombova energija jednoga protona s obzirom na sve ostale $(Z-1)$ puta tolika, što je i trebalo dokazati.

(Tu treba napomenuti, da gornji izvod vrijedi uz pretpostavku, da je električni naboj e svakoga protona jednoliko porazdijeljen u cijelom području kugle polumjera R, kojom smo predočili atomnu jezgru.)

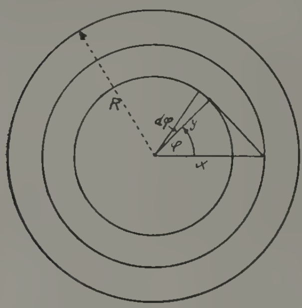
Sva ostala rješenja polaze od činjenice, da je uzajamna Coulombova energija između dva protona $e^2 \cdot \frac{1}{r}$, pa da prema tome potencijalna energija jednoga protona prema preostalih $(Z-1)$ iznosi

$$E_{pot} = (Z-1)\,e^2 \cdot \overline{\frac{1}{r}}$$

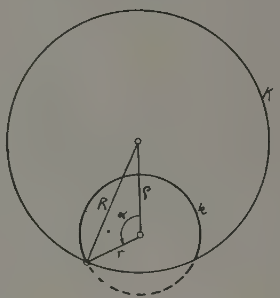
---

[1]) Vidi I. Supek: Teorijska fizika i struktura materije, Zagreb 1949., str. 204.

gdje je $\overline{\frac{1}{r}}$ srednja vrijednost recipročne udaljenosti dviju po volji smještenih točaka unutar kugle radiusa R. Metode, da se nađe ta srednja vrijednost, u rješenjima se prilično međusobno razlikuju, pa ih sve iznosimo u opširnijem izvodu.



Sl. 1



Sl. 2

D. Gospodnetić u svome prvom rješenju postupa ovako.

Coulombova potencijalna energija kugle, homogeno ispunjene nabojem $e = \varrho \cdot V$, jest

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{(\varrho\, d\, v)^2}{r} = \frac{1}{2}\, \varrho^2\, V^2 \cdot \overline{\frac{1}{r}} = \frac{1}{2}\, e^2\, \overline{\frac{1}{r}}\,.$$

S druge strane za tu energiju imamo poznati izraz

$$U = \frac{3}{5}\, \frac{e^2}{R}\,.$$

Isporedimo li ta dva izraza imamo

$$\overline{\frac{1}{r}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R}\,.$$

D. Mayer određuje $\overline{\frac{1}{r}}$ na slijedeći način:

Vjerojatnost, da se jedan proton nalazi u kuglinoj ljusci polumjera x, debljine dx, (vidi sl. 1.) iznosi

$$4\, x^2 \pi\, d\, x : \frac{4}{3}\, R^3 \pi = \frac{3\, x^2\, d\, x}{R^3}\,.$$

Vjerojatnost, da se drugi proton nalazi u ljusci polumjera y, debljine dy, iznosi $\frac{3 y^2\, d y}{R^3}$. Vjerojatnost da ti protoni imaju udaljenost između r i $r + dr$ bit će

$$\frac{2\, x \sin \varphi \cdot x\, d\, \varphi \cdot \pi}{4\, x^2 \pi} = \frac{\sin \varphi \cdot d\, \varphi}{2}\,.$$

Vjerojatnost, da budu istovremeno ispunjena sva tri uvjeta, jednaka je produktu tih triju vjerojatnosti.

Prema poznatom stavku iz teorije vjerojatnosti prosječnu vrijednost neke veličine dobivamo tako, da njene moguće vrijednosti pomnožimo s vjerojatnošću i zbrojimo. Dakle

$$\overline{\frac{1}{r}} = \int \frac{1}{r} \cdot dw =$$

$$= \int_{x=0}^{R} \int_{y=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{3x^2\,dx}{R^3} \cdot \frac{3y^2\,dy}{R^3} \cdot \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2} (x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi)^{-1/2}.$$

Nakon izračunavanja ovih integrala dobijemo

$$\overline{\frac{1}{r}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R}.$$

S. Mardešić postupa ovako.

Vjerojatnost dP, da se prva točka nalazi u volumnom elementu dv_1, a druga u volumnom elementu dv_2

$$dP = \frac{dv_1 \cdot dv_2}{V^2}$$

gdje je V volumen kugle.

Druga točka međutim mora biti udaljena od prve za r. Ako je dakle prva točka udaljena od središta kugle K za ϱ, druga će ležati na površini kugle k radiusa r sa središtem u prvoj točki (vidi sl. 2.).

Ako je $\varrho \leq R - r$ dolazi u obzir cijela površina kugle k, ako je pak $\varrho \geq R - r$ dolazi u obzir samo kalota, koju isjeca zadana kugla K iz kugle k. Površina ove kalote je

$$\Phi = 2r^2\pi(1 - \cos\alpha).$$

Iz poučka o kosinusima imamo

$$-2r\cos\alpha = \frac{R^2 - r^2 - \varrho^2}{\varrho}.$$

Za dv_2 imamo dakle

$$dv_2 = \Phi\,dr$$

gdje je $\quad \Phi = 4r^2\pi$, za $0 \leq \varrho \leq R - r$,

a $\quad \Phi = 2r^2\pi + \frac{r\pi}{\varrho}(R^2 - r^2 - \varrho^2)$, za $R - r \leq \varrho \leq R$.

Ukupnu vjerojatnost, da se točke nalaze u udaljenosti r, dobit ćemo, ako pustimo, da prva točka varira po kugli, t. j.

$$dv_1 = 4\pi\varrho^2\,d\varrho$$

odavde

$$dw = \int_0^R \left(\frac{4\pi}{V^2}\varrho^2\Phi\,dr\right) d\varrho =$$

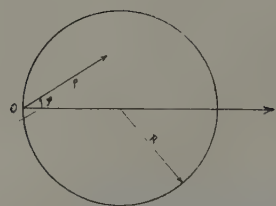
$$= \frac{4\pi\,dr}{V^2}\left\{\int_0^{R-r} 4\pi r^2\varrho^2\,d\varrho + \int_{R-r}^{R} \varrho^2\left[2r^2\pi + \frac{r\pi}{\varrho}(R^2 - r^2 - \varrho^2)\right] d\varrho\right\} =$$

$$= \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R}.$$

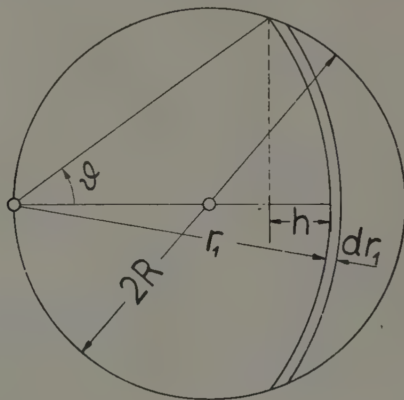
I. Babić-Gjalski dijeli kuglu na jedinične ćelije. Broj svih međusobnih udaljenosti iznosi tada

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2 .$$

Polovinu smo uzeli zato, jer nas zanimaju samo iznosi međusobnih udaljenosti, pa ne razlikujemo udaljenost točke P_1 od točke P_2 od udaljenosti točke P_2 do točke P_1.



Sl. 3



Sl. 4

Suma svih recipročnih vrijednosti bit će

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2 \overline{\frac{1}{r}}$$

Ta se suma može odrediti i na drugi način:

Povećamo li radius kugle za dR, povećat se Σ za $d\Sigma$. To povećanje iznosi

$$d\Sigma = \frac{4}{3} R^3 \pi \cdot 4 R^2 \pi \, dR \cdot \overline{\frac{1}{r_1}}$$

Ovdje $\overline{\frac{1}{r_1}}$ znači prosječnu vrijednost recipročnog iznosa udaljenosti jedne točke na rubu od svih ostalih točaka u unutrašnjosti kugle.

Mirna točka neka je pol O, a polarna os neka prolazi promjerom. Odaberemo li određene vrijednosti koordinata ϱ, φ pa zarotiramo elemenat površine $\varrho \, d\varrho \, d\varphi$ oko polarne osi, to će prsten volumena $2\pi\varrho \sin\varphi \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi$ imati stalnu udaljenost ϱ od pola (vidi sl. 3.). Odatle, integracijom po cijeloj kugli, po definiciji srednje vrijednosti, dobivamo

$$\overline{\frac{1}{r_1}} = \frac{\int\limits_{\rho=0}^{2R\cos\varphi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 2\pi\varrho\sin\varphi \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi}{\int\limits_{\rho=0}^{2R\cos\varphi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} 2\pi\varrho\sin\varphi \cdot \varrho \, d\varrho \, d\varphi} = \frac{1}{R}$$

Dakle imamo

$$d\Sigma = \frac{4}{3} R^3\pi \cdot 4R^2\pi dR \cdot \frac{1}{R}$$

ili

$$\Sigma = \frac{16}{15}\pi^2 R^2 .$$

Usporedba sa prvim izrazom za Σ daje

$$\overline{\frac{1}{r}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{R} .$$

D. Gospodnetić u svom drugom rješenju polazi od slijedećeg stavka teorije vjerojatnosti:

Neka je u području D prostora smještena figura F oblikovana s n točaka. Neka su uvjeti, kojima treba figura F udovoljavati, takovi, da se odnose samo na relativni položaj elemenata figure F prema sebi (ne prema D). Neka je y funkcija figure F. Označimo li s V volumen područja D i pustimo li da D poraste za dV tako, da novo područje potpuno opkoljava staro, tada će promjena srednje vrijednosti funkcije y biti:

$$d\bar{y} = n(\bar{y}_1 - \bar{y}) \frac{dV}{V} ,$$

gdje je $\bar{y}_1$ srednja vrijednost za y, ako se jedna od n točaka nalazi unutar dV, t. j. na rubu područja D[2]).

U našem slučaju dvije točke unutar kugle radiusa R sačinjavaju dužinu r, koja mora zadovoljavati uvjetu $r < 2R$. Funkcija, koja zavisi o dužini r, je $\frac{1}{r}$. Prema tome poraste li R za dR biti će:

$$d\left(\overline{\frac{1}{r}}\right) = 2\left(\overline{\frac{1}{r_1}} - \overline{\frac{1}{r}}\right)\frac{dV}{V} = 6\left(\overline{\frac{1}{r_1}} - \overline{\frac{1}{r}}\right)\frac{dR}{R} .$$

r_1 je udaljenost između jedne točke na kugli i jedne u kugli. Očite su postavke:

$$\overline{\frac{1}{r}} = k\frac{1}{R}, \quad \overline{\frac{1}{r_1}} = k_1\frac{1}{R}$$

gdje su k i k_1 konstante. Naš izraz poprima tako oblik

$$-k\frac{dR}{R^2} = \frac{6}{R}(k_1 - k)\frac{dR}{R}$$

odakle

$$k = \frac{6}{5}k_1 \qquad \overline{\frac{1}{r}} = \frac{6}{5}\overline{\frac{1}{r_1}}$$

Time smo problem određivanja $\overline{\frac{1}{r}}$ sveli na jednostavniji problem određivanja $\overline{\frac{1}{r_1}}$.

---

[2]) Izvod vidi: R. Deltheil: Probabilités géométriques u zbirci E. Borel: Traité du calcul des probabilités et de ses applications, tom II. svez. 2., str. 41. Na strani 117 dano je opće rješenje gornjeg problema u višedimenzionalnom prostoru.

Veličinu $\overline{\frac{1}{r_1}}$ odredio je I. Babić-Gjalski u svome rješenju i dobio da ona iznosi $\frac{1}{R}$. Gospodnetićev postupak za određivanje te veličine osniva se na ranije spomenutom stavku iz teorije vjerojatnosti za određivanje prosječne vrijednosti neke funkcije:

$$\overline{\frac{1}{r_1}} = \int_0^{2R} \frac{1}{r_1}\, p\,(r_1)\, d\,r_1$$

Vjerojatnost $p\,(r_1)\,dr_1 = \frac{f\,d\,r_1}{V}$, gdje je f površina kalote radiusa r_1 (vidi sl. 4.). Postavimo li $r_1 = 2R \cdot \cos\vartheta$, gdje je 2ϑ središnji kut te kalote, imamo:

$$f\,d\,r_1 = 2\pi r_1\, h\, d\,r_1 = 2\pi r_1^2\,(1 - \cos\vartheta)\, d\,r_1 = -$$
$$= -\,16\pi R^3 \cos^2\vartheta\,(1 - \cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\,\vartheta$$

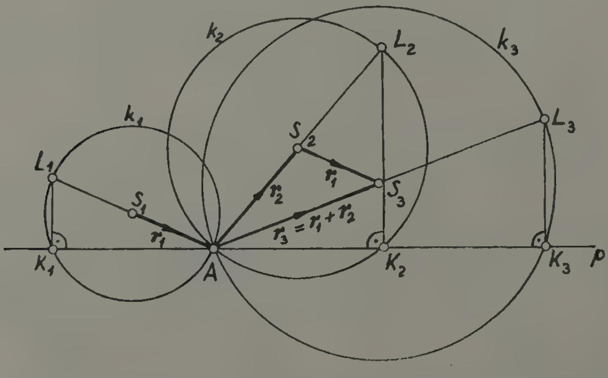
uz $V = \frac{4}{3} R^3 \pi$. Ako te izraze uvrstimo u izraz za traženu srednju vrijednost, dobivamo:

$$\overline{\frac{1}{r_1}} = \frac{1}{R} \quad \text{i konačno} \quad \overline{\frac{1}{r}} = \frac{6}{5}\,\frac{1}{R}.$$

132. Zadan je trokut $A\,B\,C$ i trokut $A'\,B'\,C'$. Smjesti prvi trokut tako, da mu vrhovi A, B, C leže redom na stranicama a, b, c drugog ili njihovim produljenjima.

Zadatak je s rješenjem dostavio V. Devidé, Zagreb. Riješio ga je D. Palman, Zagreb.

1. Dokažimo najprije slijedeći pomoćni stavak:

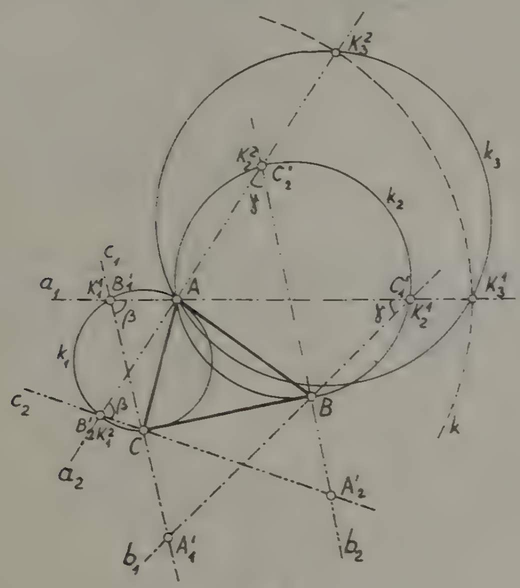


Sl. 1

Ako su dane tri kružnice k_1, k_2, k_3 sa radiusima $S_1A = \mathbf{r}_1$, $AS_2 = \mathbf{r}_2$, $AS_3 = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ (sl. 1.), koje prolaze točkom A, onda bilo koji pravac p, koji prolazi tom točkom, siječe k_1, k_2 i k_3 u K_1, K_2 i K_3 tako, da je $K_1K_2 = AK_3$.

Dokaz. Duljina K_1K_2 jednaka je zbroju projekcija promjera $2r_1 = L_1A$ i $2r_2 = AL_2$ u smjer pravca p, a taj je jednak projekciji zbroja $AL_3 = 2r_3 = 2r_1 + 2r_2$ tih promjera u taj smjer.

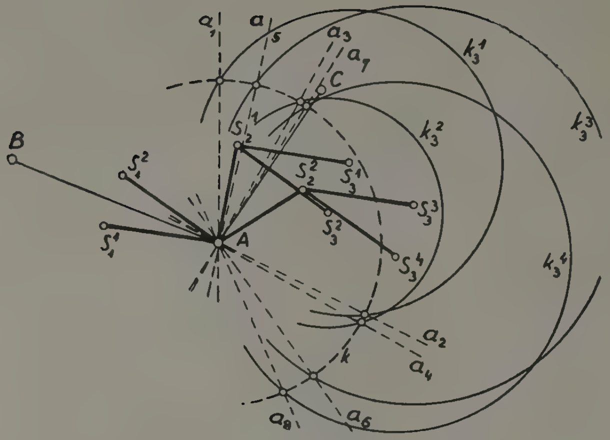
2. Trokut ABC smatrat ćemo čvrstim i opisati mu trokut $A'B'C'$. Budući da točke A, B, C moraju redom ležati na pravcima a, b, c, morat će točka B' (C') ležati na kružnici k_1 (k_2), kojoj je AC (AB) tetiva, nad kojom su obodni kutovi jednaki kutu β (γ) trokuta $A'B'C'$ (sl. 2.) Te točke bit će poznate — i postavljeni



Sl. 2

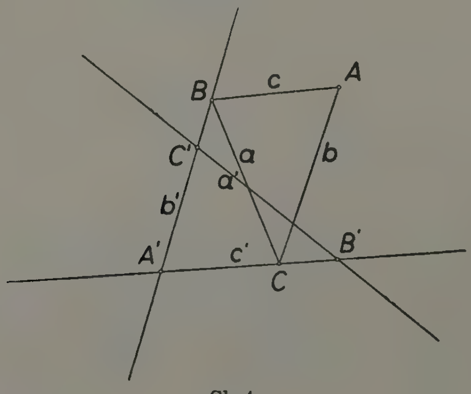
zadatak riješen — ako se nađe pravac a kroz A, koji k_1 i k_2 siječe u K_1 i K_2 tako, da je $K_1K_2 = B'C'$; taj ćemo pak položaj prema dokazanom stavu naći, ako kružnicama k_1 i k_2 odgovarajuću kružnicu k_3 siječemo kružnicom k sa središtem u A i radiusom $B'C'$. Već prema tome, da li je $B'C' \lesseqgtr 2r_3$ dobit ćemo 2, 1 ili nijedno rješenje. Budući da tetivi AC (AB) odgovaraju dvije kružnice k_1 (k_2), dobit ćemo tako najviše $2 \cdot (2 \cdot 2)$ moguća položaja pravca a (sl. 3.), od kojih treba odbaciti one, kod kojih kutevi β i γ ne leže na istoj strani od a, jer trokut $A'B'C'$, koji im odgovara u tom slučaju, ne će imati kuteve β, γ kao zadani već β, $180^0 - \gamma$ ili $180^0 - \beta$, γ.

D. Palman rješava zadatak na dva načina (zadane trokute uzima kao orijentirane):



Sl. 3

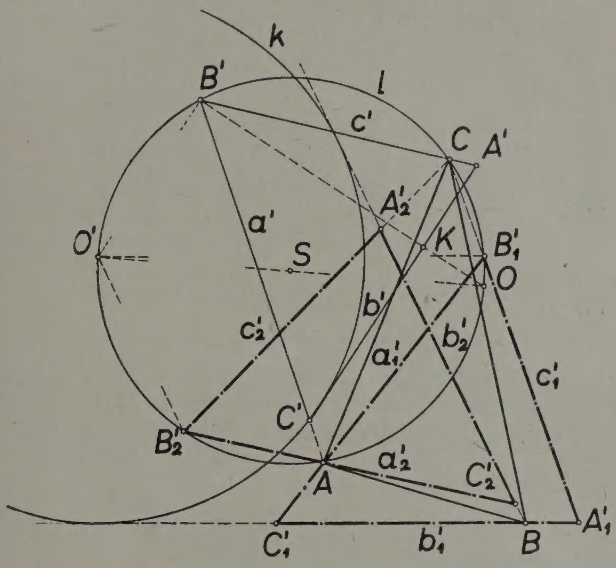
I. r j e š e n j e: Trokut $A'B'C'$ neka je čvrst. Vrh B trokuta ABC neka leži negdje na stranici b', a vrh C na c' (sl. 4.). Ako ti vrhovi putuju po odgovarajućim stranicama (uvijek mislimo: stranicama ili njihovim produljenjima) opisivat će vrh A krivulju,



Sl. 4

koja je prema v a n S c h o o t e n o v u stavku (Dörrie: T r i u m p h d e r M a t h e m a t i k, str. 214) elipsa. Odredimo li, poznatim načinom u sintetičnoj geometriji, sjecišta te elipse (za koju potražimo 5 točaka) sa a', dobili smo dva rješenja, koja mogu i pasti zajedno (a' tangenta na elipsu) ili mogu biti i imaginarna (a' ne siječe elipsu).

II. r j e š e n j e. Da bi trokut $A' B' C'$ namjestili tako, da mu stranice a', b', c' prolaze odgovarajućim točkama trokuta $A B C$, postupimo ovako (sl. 5.): $A' B' C'$ konstruiramo tako, da c' prolazi kroz C a a' kroz A. Ako sada $A' B' C'$ okrećemo tako, da se stalno A nalazi na a' i C na c', onda će B' opisivati kružnicu l (konstantni kut nad istom tetivom). Visina trokuta $A' B' C'$ iz vrha B' siječe l u O; isto će tako, gdje god se nalazilo B', sve visine prolaziti točkom O, jer je $\sphericalangle OB'C$ za svaki položaj trokuta jednak, pa i tetiva OC mora biti ista. Točka K (nožište visine iz B') opisuje jednu konhoidu kružnice l ili Pascalov puž (Dr. Wieleitner: S p e z i e l l e e b e n e K u r v e n, str. 86.), a kako je b' uvijek okomito na visinu,



Sl. 5.

to K opisuje nožišnu krivulju s obzirom na krivulju što je umataju sve stranice b' za pol O. Jer je Pascalov puž nožišna krivulja kružnice, to sve stranice b' omataju jednu kružnicu k, kojoj središte O' leži na l (Dr. Wieleitner: isto, str. 89. Fig. 48. i 49.), a radius joj je jednak dužini $B' K$. Paralela sa $A' C'$ iz B' siječe dakle l u O'. Zbog simetrije Pascalova puža, O' je dijametralno suprotno točki O. Stranica b' u traženom položaju tangenta je iz B na k. Kako na kružnicu iz jedne točke možemo općenito povući dvije tangente, to ćemo općenito imati dva rješenja; vrhovi B_1' i B_2' bit će u točkama, gdje paralele iz O' sa tangentama b_1' i b_2' sijeku l. Time su određeni i položaji traženog trokuta; oba će rješenja pasti zajedno, kada B padne na k, a imaginarna su kada B padne unutar k.

149.* Po nekog čovjeka dolazi svaki dan auto u tri sata popodne, kojim se vozi kući. Jednog dana završivši svoj posao u dva sata pođe šetajući u susret autu, a kad ga sretne, popne se i odveze kući, kuda je tog dana stigao dvadeset minuta prije, nego u ostale dane. Koliko je vremena pješačio tog dana?

Zadatak s rješenjem dostavio L. Randić. Riješili su ga: S. Milošević, Titograd; N. Cindro, Zagreb; M. Mihaljinec, Zagreb; V. Fatić, Novi Sad; L. Krnić, Šibenik; F. Dovšak, Split.

Rješenje: Tog dana je auto prevalio manje nego obično dvostruki put što ga je čovjek propješačio, a za taj dvostruki put bi auto trebao dvadeset minuta. Prema tome auto je susreo pješaka deset minuta prije tri sata, dakle je pješak šetao pedeset minuta.

ZADACI

154.* Dokaži: Zbroj kvadrata težišnica trokuta iznosi tri četvrtine zbroja kvadrata njegovih stranica.

(Dostavio *D. Blanuša*)

155. Dana je grupa G. Definira li se za elemente od G još i operacija σ sa

$$a \sigma b = f_1(a) \cdot f_2(b)$$

gdje su f_1 i f_2 funkcije, koje svakom elementu x grupe jednoznačno pridijeljuju elemente $f_1(x)$ i $f_2(x)$, tada vrijedi:

Ako obzirom na σ-multiplikaciju postoji jedinični element e_σ, onda elementi od G čine grupu i obzirom na σ-multiplikaciju i ta je grupa izomorfna sa G.

(Dostavio *V. Devidé*)

156. Dokaži da je

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r 2^{2r} \binom{n}{r} \binom{n+k-r}{n} \binom{2n-2r}{n+k-r} = \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k}{k}.$$

(Dostavio *D. Blanuša*)

»Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, glasilo Društva matematičara i fizičara N. R. H., izlazi godišnje u pet brojeva po tri štampana arka. Godišnja pretplata iznosi Din 180.—, a može se slati na upravu Hrvatskog prirodoslovnog društva, Ilica 16/III, ili poštanskim čekom Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Hrvatske broj 401-9533139. Glavni i odgovorni urednik: Stanko Bilinski. Redakcioni odbor: Danilo Blanuša, Josip Goldberg, Đuro Kurepa, Branimir Marković, Mladen Paić, Ivan Supek, Stjepan Škreblin, Radovan Vernić. Tehnički urednik: Zlatko Janković. — Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta broj 31.

SARADNICIMA »GLASNIKA«

Članke i dopise treba upućivati *redakciji Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Članci neka su jezično korigirani i pisani strojem sa proredom na jednoj strani papira. Uz svaki članak neka je priložen sadržaj na kojem od svjetskih jezika i to približno do jedne trećine opsega članka. Pri tom neka se formule iz članka u sadržaju ne ponavljaju. Zato treba u članku formule numerirati i u sadržaju se na njih pozvati. Glasniku se mogu poslati i članci na kojem stranom svjetskom jeziku. U tom slučaju neka se priloži sadržaj na hrvatskom jeziku. Autori iz inozemstva mogu poslati uz članak i sadržaj na svom jeziku. Taj će sadržaj uredništvo prevesti na hrvatski.

Autori dobivaju 50 separata besplatno.

AUX COLLABORATEURS DU »GLASNIK«

Les collaborateurs sont priés d'adresser les articles et la correspondance à la *rédaction de »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, Zagreb, Marulićev trg 19.*

Les manuscrits doivent être écrits à la machine avec interligne sur une côté de la feuille. Les formules doivent être numérotées afin d'éviter leur répétition dans le résumé. Les auteurs étrangers sont invités de rédiger le résumé dans leur langue, la rédaction se chargeant de le traduire en croate.

Les auteurs reçoivent à titre gratuit 50 exemplaires de tirages à part.

IZ REDAKCIJE

Rješenja zadataka, koja se šalju »Glasniku«, neka su pisana strojem ili čitljivo rukom na jednoj strani papira i to tako, da se rješenje svakog zadatka nalazi na posebnom papiru. Ako je uz rješenje potrebna slika, treba je nacrtati posebno, po mogućnosti na boljem papiru. Rješenja označena zvjezdicom objavit ćemo već u drugom narednom broju »Glasnika«. Te zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvih semestara. Neka se redakciji šalju i zadaci, ali samo originalni i sa pripadnim rješenjem.

OBAVIJEST

Matematičari, fizičari i svi ostali, koji se zanimate matematičko-fizičkim naukama, učlanite se u Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske.

Prijave poslati zajedno s adresom Hrvatskom prirodoslovnom društvu, Zagreb, Ilica 16/III (za Društvo matematičara i fizičara N. R. H.). Upisninu od Din 20.— i godišnju članarinu od Din 180.— pošaljite čekovnom uplatnicom 401-9533139 (Društvo mat. i fiz. N. R. H., Zagreb). Članovi Društva dobivaju Glasnik besplatno.

Pravila Društva mogu se dobiti besplatno, ako ih zatražite na gornji naslov.

Na Glasnik se mogu pretplatiti i oni, koji nisu članovi Društva. Pretplata iznosi Din 180.— godišnje i šalje se čekovnom uplatnicom.

Molimo članove i pretplatnike da uredno plaćaju članarinu odnosno pretplatu.

Svaku promjenu adrese treba hitno javiti Hrv. prir. društvu.